Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД
- из математике -

Дирихлеови редови и дистрибуција простих бројева

Ученик:
Лазар Корсић IVд

Ментор:
Борислав Гајић

Београд, јун 2019.

Садржај

1

Увод

Прости бројеви су фасцинирали математичаре откад се знало за њих. Нека основна својства простих бројева открили су и доказали још стари Грци. Тај, наизглед насумичан, низ природних бројева ипак испољава нека својства која су неочекивана за насумичне низове. Тај низ простих бројева заправо садржи мноштво правилности. Те правилности није толико тешко уочити колико их је тешко доказати. Многа таква својства простих бројева проверено важе за првих неколико билијарди и више природних бројева и због тога је сулудо веровати да не важе за све бројеве, али, већина тих својстава још увек нису доказана. Најпознатија су четири проблема која је записао Ландау. То су Голдбахова хипотеза, Лежандрова хипотеза, постојање бесконачно много бројева близанаца и постојање бесконачно много простих бројева облика $n^2 + 1$. Ниједан од њих није решен. Један такав проблем који дуго времена ниије био решен је **теорема о дистрибуцији простих бројева** (или просто теорема о простим бројевима):

Теорема о дистрибуцији простих бројева. Нека $\pi(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ означава број простих бројева не већих од x. Када $x \to +\infty$, важи асимптотска једнакост

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$$

(*видети основне појмове за симбол* $\sim$)

Међу првима који су увидели то, били су Лежандр и Гаус. Лежандр је 1797. или 1798. године претпоставио да $\pi(x)$ може да се апроксимира функцијом

$$\pi(x) \approx \frac{x}{A \ln x + B}$$

Гаус је у својој 15. или 16. години обратио пажњу на ову дистрибуцију и посматрајући густину простих бројева у интервалима дужине 1000 приметио да она опада отприлике као $1/\ln x$ што га је довело до апроксимације

$$\pi(x) \approx \mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$$

Дирихле је касније, 1838. године, дошао до сличне претпоставке као Гаус: $\pi(x) \sim \mathrm{li}(x)$. Иако су све три оцене еквивалентне теореми, Гаусова и Дирихлеова су тачније од Лежандрове ако посматрамо разлику између праве и процењене вредности, а не њихов однос.

Прве кораке ка доказу ове теореме направио је Чебишев у својим радовима 1848. и 1852. године. Успео је да докаже да је однос функција $\pi(x)$ и $x/\ln x$ за довољно велике x ограничен константама 0.92 и 1.11. Оцене су временом мало побољшане у Силвестеровом раду из 1892. и, осим тога, никакав напредак није постигнут све док се комплетан доказ теореме није појавио 1896. године. Риман је 1859. године објавио кратак рад [8] у коме је поставио своју чувену хипотезу познату данас као Риманова хипотеза. У свом раду испитивао је дубоке везе између дистрибуције простих бројева и дистрибуције нула зета функције. Треба напоменути да је Риманову зета функцију први увео Ојлер 1737. који је истакао неке основне везе између простих бројева и те функције као што је Ојлеров производ. На основу Риманових резултата, Хадамард и Ла Вале Пусен су (независно један од другог) 1896. године дали доказе теореме о дистрибуцији простих бројева [2]. Њихови докази су били дугачки и веома неинтуитивни. Касније, употребом Тауберовске теорије, докази су значајно скраћени. У овом раду представићемо један такав доказ који је саставио Њуман и објавио у својој књизи [9] и објаснићемо је зашто је очекивано да Дирихлеови редови (након познавања неких Тауберовских теорема) брзо имплицирају теорему о дистрибуцији простих бројева. Због употребе комплексних Тауберовских теорема од читаоца се очекује да поседује основно знање комплексне анализе.

2

Основи појмови

2.1 Лимеси

За функције $f : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$, за скуп $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$, дефинишемо лимесе:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = C \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - C| < \varepsilon)$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = C \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - C| < \varepsilon)$$

где су a, ε и δ из $\mathbb{R}$, x из $\mathbb{A}$, а C из $\mathbb{C}$.

Трећи лимес се може дефинисати и ако је $\mathbb{A} \subset \mathbb{C}$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = C \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - C| < \varepsilon)$$

где је a сада из скупа $\mathbb{C}$.

У исказу сваког лимеса постоји један знак "$\Rightarrow$" који дели исказ на услов и последицу. У краћем облику, услов се пише испод знака "lim", а последица десно од знака "lim". Услови такође могу изгледати $\lim\limits_{x\to+\infty}$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}$ у значењу $x > \delta$ и $x < -\delta$, тим редом. И последице могу изгледати $\lim f(x) = +\infty$ и $\lim f(x) = -\infty$ у значењу $f(x) > \varepsilon$ и $f(x) < -\varepsilon$.

У неким случајемвима исказ није тачан за све ε, али за неке ε јесте. Тада за функције $f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$, за скуп $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ можемо дефинисати $\limsup f(x) = C$ и $\liminf f(x) = C$ (као супремум и инфимум скупа варепсилона за које је исказ тачан):

$$\limsup_{x\to+\infty} f(x) = C \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x\to+\infty} \sup_{y>x} f(y) = C \Leftrightarrow \inf_{x>0} \sup_{y>x} f(y) = C$$

$$\liminf_{x\to+\infty} f(x) = C \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x\to+\infty} \inf_{y>x} f(y) = C \Leftrightarrow \sup_{x>0} \inf_{y>x} f(y) = C$$

Навешћемо без доказа:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = C \Leftrightarrow \limsup_{x\to+\infty} f(x) = \liminf_{x\to+\infty} f(x) = C$$

2.2 Величине функција

За функције $f, g : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$, за скуп $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ облика $\mathbb{A} = [s, +\infty)$, кажемо да у лимесу $x \to +\infty$ важе следеће ознаке, а њихова значења су објашњена исказима:

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \iff (\exists x_0 \in \mathbb{R})(\exists c \in \mathbb{R}^+)(\forall x > x_0)(|f(x)| < c \cdot |g(x)|)$$

$$f(x) = \Omega(g(x)) \iff (\exists x_0 \in \mathbb{R})(\exists c \in \mathbb{R}^+)(\forall x > x_0)(|f(x)| > c \cdot |g(x)|)$$

$$f(x) = \Theta(g(x)) \iff f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \quad \wedge \quad f(x) = \Omega(g(x))$$

$$f(x) = o(g(x)) \iff (\forall c \in \mathbb{R}^+)(\exists x_0 \in \mathbb{R})(\forall x > x_0)(|f(x)| < c \cdot |g(x)|)$$

$$f(x) = \omega(g(x)) \iff (\forall c \in \mathbb{R}^+)(\exists x_0 \in \mathbb{R})(\forall x > x_0)(|f(x)| > c \cdot |g(x)|)$$

Користећи лимесе, ове дефиниције се могу упростити:

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \iff \limsup_{x \to +\infty} |\tfrac{f(x)}{g(x)}| \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \Omega(g(x)) \iff \limsup_{x \to +\infty} |\tfrac{g(x)}{f(x)}| \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \Theta(g(x)) \iff \limsup_{x \to +\infty} |\tfrac{f(x)}{g(x)}| \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad \liminf_{x \to +\infty} |\tfrac{f(x)}{g(x)}| \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = o(g(x)) \iff \lim_{x \to +\infty} \tfrac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$f(x) = \omega(g(x)) \iff \lim_{x \to +\infty} \tfrac{g(x)}{f(x)} = 0$$

$$f(x) \sim g(x) \iff \lim_{x \to +\infty} |\tfrac{f(x)}{g(x)}| = 1$$

Навешћемо неке основне особине ових скупова функција без доказа:

$o(f(x)) = \mathcal{O}(f(x))$
$\mathcal{O}(f(x)) + \mathcal{O}(f(x)) = \mathcal{O}(f(x))$
$\mathcal{O}(f(x)) - \mathcal{O}(f(x)) = \mathcal{O}(f(x))$
$f(x) \sim g(x) \Rightarrow \mathcal{O}(f(x)) = \mathcal{O}(g(x))$
$f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = o(g(x))$

2.3 Суме

Нека договор буде да следеће суме означавају:

$\sum\limits_{n\le x} f(n):$ суму вредности функције f у свим целобројним тачкама $n \le x$, $x \in \mathbb{R}$, у којима је f дефинисано

$\sum\limits_{p\le x} f(p):$ суму вредности функције f по свим простим аргументима $p \le x$, $x \in \mathbb{R}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n):$ лимес парцијалних сума: $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} f(n)$

3

Елементарне методе

У овом делу разматраћемо само функције $f : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$, за $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$.

3.1 Абелове леме

За диференцијабилне функције f и g можемо раставити диференцијал њиховог производа на следећи начин:

$d(fg) = fdg + gdf$

Када се обе стране интеграле, овај идентитет постаје користан јер трансформише један интегранд у други. Ситуације у којима нам ово помаже су разне. Једна коју ћемо често сретати у овом раду је та у којој ограничавамо интеграл па је парцијална интеграција ту да хомогенише интегранд. Међутим, идентитет је неисправно користити ако f и g нису диференцијабилне. Зато ћемо проширити идентитет на скуп функција који обухвата и парцијалне суме: $f(x) = \sum\limits_{n \leq x} a_n$

Оператори D и Δ

D је оператор који само слика функције f у њихов извод, у f':

$Df(x) := \lim\limits_{a \to x} \frac{f(a)-f(x)}{a-x}$

а Δ говори колики је скок функције тамо где није непрекидна:

$\Delta f(x) := \lim\limits_{b \to x^+} f(b) - \lim\limits_{a \to x^-} f(a)$

Можемо закључити: $Df(x) \in \mathbb{C} \Rightarrow \Delta f(x) = 0$
Биће нам корисне и следеће дефиниције:

$\overline{f}(x) := \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} f(x+\varepsilon) \qquad \underline{f}(x) := \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} f(x-\varepsilon)$

Сада можемо да кажемо $\Delta f = \overline{f} - \underline{f}$.

Ако је Df (или Δf) једнако нули у свакој тачки у којој је дефинисано, писаћемо:

$Df \equiv 0$, односно $\Delta f \equiv 0$

3 класе функција

За реалне $a < b$,

$\Phi_0(a,b)$ је скуп свих функција f које задовољавају:

(1°) Df је дефинисано на (a,b), осим у коначно много тачака
(2°) $\overline{f}$ је дефинисано на $[a,b)$
(3°) $\underline{f}$ је дефинисано на $(a,b]$

$\Phi_1(a,b) := \{F \in \Phi_0(a,b) | \Delta F \equiv 0\}$

$\Phi_2(a,b) := \{\varphi \in \Phi_0(a,b) | D\varphi \equiv 0\}$

За реалне $a_1 \leq a_0 < b_0 \leq b_1$ очигледно важи:

$\Phi_0(a_1,b_1) \subset \Phi_0(a_0,b_0)$

$\Phi_1(a_1,b_1) \subset \Phi_1(a_0,b_0)$

$\Phi_2(a_1,b_1) \subset \Phi_2(a_0,b_0)$

Дистрибутивност оператора D и Δ са $+$ и $-$

Теорема 3.1.1. Ако су f и g из $\Phi_0(a,b)$, онда за свако $x \in (a,b)$ важи:

(1°) $D(f+g) = Df + Dg$ и $D(f-g) = Df - Dg$
(2°) $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$ и $\Delta(f-g) = \Delta f - \Delta g$

Доказ.

$$(1°) \quad D(f+g)(x) = \lim_{a\to x} \frac{f(a)+g(a)-f(x)-g(x)}{a-x} =$$

$$= \lim_{a\to x} \frac{f(a)-f(x)}{a-x} + \lim_{a\to x} \frac{g(a)-g(x)}{a-x} = Df(x) + Dg(x)$$

$$(2°) \quad \Delta(f+g)(x) = \lim_{a\to x^+} [f(a)+g(a)] - \lim_{b\to x^-} [f(b)+g(b)] =$$

$$= \lim_{a\to x^+} f(a) - \lim_{b\to x^-} f(b) + \lim_{a\to x^+} g(a) - \lim_{b\to x^-} g(b) = \Delta f(x) + \Delta g(x)$$

Аналогно се доказује и за $-$; из (2°) следи и да су и "$\overline{}$" и "$\underline{}$" дистрибутивни са $+$ и $-$. $\square$

Оператори $\int$ и $\sum$

Ако је $f \in \Phi_0(a,b)$, онда су:

$$\int Df := \{F \in \Phi_1(a,b) | DF = Df\}$$

$$\sum \Delta f := \{\varphi \in \Phi_2(a,b) | \Delta\varphi = \Delta f\}$$

Одређени интеграли и суме

Као што су и иначе неодређени интеграли уведени, и ми смо увели наше неодређене интеграле и неодређене суме да бисмо лакше рачунали одређене. Зато треба сада већ да покажемо да основна теорема анализе (или Њутн-Лајбницова теорема) важи и за наше интеграле:

Теорема 3.1.2. Ако је $f \in \Phi_0(a,b)$, Df интеграбилна функција на $[a,b]$ и $F \in \int Df$, онда $\int_a^b Df(x)dx = \underline{F}(b) - \overline{F}(a)$.

Доказ. Хајде да поставимо све тачке из интервала $[a,b]$ у којима Df није дефинисано у растући низ: $(P_0 = a, P_1, ..., P_n, P_{n+1} = b)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Имамо:

$$\int_a^b Df(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \int_{P_i}^{P_{i+1}} Df(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \int_{P_i}^{P_{i+1}} DF(x)dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} [\underline{F}(P_{i+1}) - \overline{F}(P_i)] = -\overline{F}(P_0) + \sum_{i=0}^{n-1} [\underline{F}(P_{i+1}) - \overline{F}(P_{i+1})] + \underline{F}(P_{n+1}) =$$

$$= \underline{F}(P_{n+1}) - \overline{F}(P_0) + \sum_{i=1}^{n} \Delta F(P_i) = \underline{F}(b) - \overline{F}(a) + 0 = \underline{F}(b) - \overline{F}(a)$$

□

Дефиниција 3.1.1. $\sum\limits_{x\in I} f(x)$ је дефинисано као сума вредности функције f у свим тачкама x из интеравала I у којима је f дефинисано и није једнако 0, под условом да таквих тачака x има коначно много.

Теорема 3.1.3. Ако је $f \in \Phi_0(a,b)$ и $\varphi \in \sum \Delta f$, онда

$$\sum_{a<x<b} \Delta f(x) = \underline{\varphi}(b) - \overline{\varphi}(a)$$

Доказ. Нека је поново $(P_0 = a, P_1, ..., P_n, P_{n+1} = b)$ растући низ свих тачака из интервала $[a,b]$ у којима Df није дефинисано. Пошто је $D\varphi \equiv 0$, φ је константно на сваком интервалу (P_i, P_{i+1}). Па имамо:

$$\sum_{a<x<b} \Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} \Delta f(P_i) = \sum_{i=1}^{n} \Delta \varphi(P_i) = \sum_{i=1}^{n} [\overline{\varphi}(P_i) - \underline{\varphi}(P_i)] =$$

$$= -\underline{\varphi}(P_1) + \sum_{i=1}^{n-1} [\overline{\varphi}(P_i) - \underline{\varphi}(P_{i+1})] + \overline{\varphi}(P_n) = \overline{\varphi}(P_n) - \underline{\varphi}(P_1) + \sum_{i=1}^{n-1} 0 =$$

$$= \underline{\varphi}(P_{n+1}) - \overline{\varphi}(P_0) + 0 = \underline{\varphi}(b) - \overline{\varphi}(a)$$

□

Константно решење

Теорема 3.1.4. Нека је $f \in \Phi_1(a,b)$ и $f \in \Phi_2(a,b)$. Тада је $\overline{f}(a) = \underline{f}(b)$.

Доказ. Имамо $f \in \sum \Delta f$, па по теореми 3.1.3 важи:

$$\underline{f}(b) - \overline{f}(a) = \sum_{a<x<b} \Delta f = \sum_{a<x<b} 0 = 0$$

□

Идентитет $f - \int Df - \sum \Delta f \in \Phi_1 \cap \Phi_2$

Теорема 3.1.5. Нека је $f \in \Phi_0(a,b)$, $F \in \int Df$ и $\varphi \in \sum \Delta f$. Тада

$$f - F - \varphi \in \Phi_1(a,b) \cap \Phi_2(a,b)$$

Доказ.

$$D(f - F - \varphi) = Df - DF - D\varphi = Df - Df - 0 = 0$$
$$\Delta(f - F - \varphi) = \Delta f - \Delta F - \Delta \varphi = \Delta f - 0 - \Delta f = 0$$

□

Теорема 3.1.6. Ако је $f \in \Phi_0(a,b)$ и Df интеграбилна на $[a,b]$, онда

$$\underline{f}(b) - \overline{f}(a) = \int_a^b Df(x)dx + \sum_{a<x<b} \Delta f(x)$$

Доказ. Нека су $F \in \int Df$ и $\varphi \in \sum \Delta f$. По теореми 3.1.5 имамо

$$\underline{f}(b) - \underline{F}(b) - \underline{\varphi}(b) = \overline{f}(a) - \overline{F}(a) - \overline{\varphi}(a)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{f}(b) - \overline{f}(a) = \underline{F}(b) - \overline{F}(a) + \underline{\varphi}(b) - \overline{\varphi}(a)$$

Па, из теорема 3.1.2 и 3.1.3 добијамо:

$$\Rightarrow \quad \underline{f}(b) - \overline{f}(a) = \int_a^b Df(x)dx + \sum_{a<x<b} \Delta f(x)$$

□

D и Δ производа fg

Теорема 3.1.7. Ако су f и g из $\Phi_0(a,b)$, онда за свако $x \in (a,b)$ важи:
(1°) $D(fg) = fDg + gDf$
(2°) $\Delta(fg) = \underline{f}\Delta g + \underline{g}\Delta f + \Delta f \Delta g$

Доказ.

$$(1°) \quad D(f \cdot g)(x) = \lim_{a\to x} \frac{f(a)g(a) - f(x)g(x)}{a-x} =$$

$$= \lim_{a\to x} \frac{f(a)g(a) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(x)g(x)}{a-x} =$$

$$= \lim_{a\to x} \frac{g(a)\cdot[f(a)-f(x)]}{a-x} + \lim_{a\to x} \frac{f(x)\cdot[g(a)-g(x)]}{a-x} =$$

$$= \lim_{a\to x} g(a) \cdot \lim_{a\to x} \frac{f(a)-f(x)}{a-x} + \lim_{a\to x} f(x) \cdot \lim_{a\to x} \frac{g(a)-g(x)}{a-x} =$$

$$= g(x)\cdot Df(x) + f(x)\cdot Dg(x)$$

$$(2°) \quad \Delta(f\cdot g) = \overline{f}\cdot\overline{g} - \underline{f}\cdot\underline{g} = (\underline{f}+\Delta f)\cdot(\underline{g}+\Delta g) - \underline{f}\cdot\underline{g} =$$

$$= \underline{fg} + \underline{f}\Delta g + \underline{g}\Delta f + \Delta f\Delta g - \underline{fg} = \underline{f}\Delta g + \underline{g}\Delta f + \Delta f \Delta g$$

еквивалентне тврдње:

$$\Delta(fg) = \overline{f}\Delta g + \underline{g}\Delta f$$

$$\Delta(fg) = \underline{f}\Delta g + \overline{g}\Delta f$$

□

Абелове леме

Из теореме 3.1.7 закључујемо да за све функције f и g из $\Phi_0(a,b)$, $f \cdot g$ је такође у $\Phi_0(a,b)$. Сада, примењујући теорему 3.1.6 на $f \cdot g$ добијамо разне идентитете у зависности од тога којим класама функције f и g припадају. Ако су и f и g из $\Phi_1(a,b)$, добијамо парцијалну интеграцију. Ако су из $\Phi_2(a,b)$ добијамо парцијалну сумацију, познату под називом Абелова лема. А ако су f и g из различитих класа ($f \in \Phi_1(a,b)$ и $g \in \Phi_2(a,b)$) добијамо оруђе за трансформацију између сума и интеграла, идентитет познат под називом Абелова формула сумирања:

Теорема 3.1.8. Абелова формула. Нека је (a_n) низ комплексних бројева индексиран од 1. И нека је $A : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ дефинисана као:

$$A(x) := \sum_{n \leq x} a_n, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

И нека је функција $f : [1, +\infty) \to \mathbb{C}$ диференцијабилна на $(1, +\infty)$ и непрекидна у 1 таква да је Df интеграбилна на $[1, +\infty)$.

Тада за свако $x \in [1, +\infty)$ важи:

$$\sum_{n \leq x} a_n f(n) = A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f'(t)dt$$

Доказ. Дефинишимо функцију $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$:

$$g(x) = \begin{cases} A(x)f(x), & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

следи:

$$Dg = ADf + fDA = ADf + 0 = ADf$$

$$\Delta g = \overline{A}\Delta f + \underline{f}\Delta A = 0 + \underline{f}\Delta A = f\Delta A$$

$$\Delta g(1) = a_1 f(1)$$

$DA \equiv 0$ па је Dg диференцијабилна, као и Df. По теореми 3.1.6 имамо:

$$\underline{g}(x) - \overline{g}(1) = \int_1^x Dg(t)dt + \sum_{1<t<x} \Delta g(t)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{1<t<x} \Delta g(t) + \overline{g}(1) = \underline{g}(x) - \int_1^x Dg(t)dt \qquad \Big/ + \Delta g(x)$$

$$\Rightarrow \Delta g(x) + \sum_{1<t<x} \Delta g(t) + \Delta g(1) + \underline{g}(1) = \Delta g(x) + \underline{g}(x) - \int_1^x Dg(t)dt$$

$$\Leftrightarrow \sum_{1\leq t\leq x} \Delta g(t) + 0 = \overline{g}(x) - \int_1^x Dg(t)dt$$

$$\Leftrightarrow \sum_{1\leq t\leq x} f(t)\Delta A(t) = A(x)f(x) - \int_1^x A(t)Df(t)dt$$

$$\Rightarrow \sum_{n\leq x} a_n f(n) = A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f'(t)dt$$

□

Абелова формула сумирања може да се добије као специјалан случај парцијалне интеграције Риман-Стилтјесових интеграла.

3.2 Апсолутна и безусловна конвергенција редова

Дефиниција 3.2.1. За ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ се каже да је апсолутно конвергентан ако сума $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ постоји. Апсолутну конвергенцију је могуће дефинисати и за низове виших димензија. На пример, $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}$ је апсолутно конвергентан ред ако сума $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |a_{n,m}|$ постоји.

Дефиниција 3.2.2. За ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ се каже да безусловно конвергира ако се мењањем распореда његових чланова сума не мења. Безусловну конвергенцију је, такође, могуће дефинисати за низове виших димензија. На пример, $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}$ је безусловно конвергентан ред ако његове чланове $a_{n,m}$ можемо поређати у низ који безусловно конвергира.

За коначно много димензија, апсолутна и безусловна конвергентност су еквивалентна својства. Доказаћемо да је до друге димензије безусловна конвергентност последица апсолутне.

Теорема 3.2.1. Ако је ред $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ апсолутно конвергентан, онда за сваку пермутацију $p : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ (бијекцију на $\mathbb{N}$) важи:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_{p(i)}$$

Другим речима, ред $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ безусловно конвергира.

Доказ. Као прво, пошто је ред $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ апсолутно конвергентан, Низ $X_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ је Кошијев низ и, према томе, сума $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ постоји. Дефинишимо за свако $n \in \mathbb{N}$ скуп P_n:

$$P_n := \{p(i) | 1 \leq i \leq n\}$$

И дефинишимо функцију $m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ која слика n у најмањи елемент који се не налази у P_n:

$$m(n) := \inf\{k | k \notin P_n\}$$

m је, очигледно, неопадајућа функција. Ако би m била ограничена и имала лимес, рецимо t, то би значило да сваки скуп P_n не садржи t, другим речима, p не слика ниједан број у t и тиме није бијекција. Дакле, m није ограничена и важи:

$$\lim_{n\to\infty} m(n) = \infty$$

Дефинишимо и скуп S_n који садржи све природне бројеве мање од n:

$$S_n := \{k \in \mathbb{N} | 1 \leq k < n\}$$

За свако $n \in \mathbb{N}$ важи $S_{m(n)} \subset P_n$. Нека је $A := \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$. Имамо:

$$\Big| \sum_{i=1}^{\infty} a_{p(i)} - \sum_{i=1}^{\infty} a_i \Big| =$$

$$= \Big| \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in P_n} a_i - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m(n)-1} a_i \Big| = \lim_{n\to\infty} \Big| \sum_{i\in P_n \cap S_{m(n)}} a_i + \sum_{i\in P_n \setminus S_{m(n)}} a_i - \sum_{i=1}^{m(n)-1} a_i \Big| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Big| \sum_{i\in S_{m(n)}} a_i + \sum_{i\in \mathbb{N}\cap(P_n \setminus S_{m(n)})} a_i - \sum_{i\in S_{m(n)}} a_i \Big| = \lim_{n\to\infty} \Big| \sum_{i\in(\mathbb{N}\setminus S_{m(n)})\cap P_n} a_i \Big| \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in(\mathbb{N}\setminus S_{m(n)})\cap P_n} |a_i| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in \mathbb{N}\setminus S_{m(n)}} |a_i| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Big(A - \sum_{i=1}^{m(n)-1} |a_i| \Big) = 0$$

□

Теорема 3.2.2. Ако $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{i,j}|$ постоји, онда следеће суме постоје и једнаке су:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j}$$

Доказ. Услов $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{i,j}|$ би тачно значио да за свако i,

$$M_i = \sum_{j=1}^{\infty} |a_{i,j}|$$

постоји и да

$$M = \sum_{i=1}^{\infty} M_i$$

такође постоји. Због претходне теореме, $A_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}$ такође постоји. Даље, због $|A_i| \leq M_i$ ред $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ је апсолутно конвергентан, па и $A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$ постоји. Дакле, сума

$$A = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}$$

постоји. Добијамо:

$$\begin{aligned}
0 \leq \lim_{N\to\infty}\left|\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} - A\right| &= \lim_{N\to\infty}\left|\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} - A\right| - \lim_{K\to\infty}\left|\sum_{i=1}^{K} A_i - A\right| = \\
&= \lim_{K\to\infty}\lim_{N\to\infty}\left|\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} - A\right| - \lim_{K\to\infty}\lim_{N\to\infty}\left|\sum_{i=1}^{K} A_i - A\right| = \\
&= \lim_{K\to\infty}\lim_{N\to\infty}\left(\left|\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} - A\right| - \left|\sum_{i=1}^{K} A_i - A\right|\right) \leq \\
&\leq \lim_{K\to\infty}\lim_{N\to\infty}\left|\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} - \sum_{i=1}^{K} A_i\right| = \\
&= \lim_{K\to\infty}\lim_{N\to\infty}\left|\sum_{i=K+1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} + \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} - \sum_{i=1}^{K} A_i\right| = \\
&= \lim_{K\to\infty}\lim_{N\to\infty}\left|\sum_{i=K+1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} + \sum_{i=1}^{K}\left(\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} - A_i\right)\right| \leq \\
&\leq \lim_{K\to\infty}\lim_{N\to\infty}\sum_{i=K+1}^{N}\sum_{j=1}^{N} |a_{i,j}| + \lim_{K\to\infty}\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{K}\left|\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} - A_i\right|
\end{aligned}$$

Докажимо сад само да је друга сума једнака нули:

$$\lim_{K\to\infty}\lim_{N\to\infty}\sum_{i=i}^{K}\left|\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} - A_i\right| = \lim_{K\to\infty}\sum_{i=1}^{K}\lim_{N\to\infty}\left|\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} - A_i\right| =$$

$$= \lim_{K\to\infty} \sum_{i=1}^{K} 0 = \lim_{K\to\infty} 0 = 0$$

Наставимо сад:

$$0 \leq \lim_{N\to\infty} \left| \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_{i,j} - A \right| \leq \lim_{K\to\infty} \lim_{N\to\infty} \sum_{i=K+1}^{N} \sum_{j=1}^{N} |a_{i,j}| \leq$$

$$\leq \lim_{K\to\infty} \lim_{N\to\infty} \sum_{i=K+1}^{N} M_i = \lim_{K\to\infty} \sum_{i=K+1}^{\infty} M_i =$$

$$\lim_{K\to\infty} \left(M - \sum_{i=1}^{K} M_i \right) = 0$$

По теореми о два полицајца и лопову, лимес $\lim_{N\to\infty} \left| \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_{i,j} - A \right|$ је 0. Доказали смо:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_{i,j} = A = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}$$

Пошто коначне суме комутирају, можемо заменити места индексима i и j и тако добити и другу једнакост. □

Теорема 3.2.3. Ако $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{i,j}|$ постоји онда та сума безусловно конвергира. То значи да, како год поређали чланове $a_{i,j}$ у низ, лимес суме тог низа ће увек бити једнак $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}$.

Доказ. По претходној теореми:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{Z=1}^{\infty} \sum_{\max(i,j)=Z} a_{i,j}$$

Дакле, могуће је поређати чланове у један такав низ. Пошто је тај низ апсолутно конвергентан (то добијамо тако што у претходну теорему убацимо чланове $|a_{i,j}|$ уместо $a_{i,j}$), по теореми 3.2.1, чланове тог низа можемо поређати било како и сума ће остати непромењена. □

3.3 Елементарне леме о величинама интегала

У овом делу ћемо показати да се неки односи величина двају функција преносе на њихове интеграле под одређеним условима и рећи ћемо нешто о конвергентности.

Лема 3.3.1. Ако су f и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ интеграбилне на $[x, y]$ и $(\forall t \in [x, y])(f(t) \leq g(t))$ онда важи $\int_x^y f(t)dt \leq \int_x^y g(t)dt$

Доказ. Дефинишимо $h(t) := g(t) - f(t) \Rightarrow h(t) \geq 0$

$\Rightarrow \int_x^y g(t)dt - \int_x^y f(t)dt = \int_x^y h(t)dt \geq 0$ □

Узећемо да за наредне леме и теореме важи да су $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ интеграбилне на $[\alpha, +\infty)$ за неко реално α.

Теорема 3.3.1. $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ за све $b \geq a \geq \alpha$

Доказ. По Римановој дефиницији одређеног интеграла и по неједнакости троугла имамо:

$$\Big|\int_a^b f(x)dx\Big| = \lim_{n\to\infty}\Big|\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Big| \leq \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n}\Big|f(\xi_i)\Big| = \int_a^b |f(x)|dx$$

□

Лема 3.3.2. $f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \Rightarrow \int_\alpha^x f(t)dt = \mathcal{O}(\int_\alpha^x g(t)dt)$

Доказ. Из претпоставке следи да постоје реални x_0 и c такви да
$(\forall x > x_0)(|f(x)| < c \cdot g(x))$
И нека су $F := \int_\alpha^{x_0} f(t)dt$ и $G := \int_\alpha^{x_0} g(t)dt$

Имамо:
$\Big|\int_\alpha^x f(t)dt\Big| \leq |F| + \Big|\int_{x_0}^x f(t)dt\Big| \leq |F| + \int_{x_0}^x |f(t)|dt \leq |F| + \int_{x_0}^x c \cdot g(t)dt =$
$= \Big|\frac{F}{G}\Big|G + c\int_{x_0}^x g(t)dt$
Нека је $m = \max(\big|\frac{F}{G}\big|, c)$. Следи:
$|\int_\alpha^x f(t)dt\big| < m \cdot G + m \cdot \int_{x_0}^x g(t)dt = m \cdot \int_\alpha^x g(t)dt$
$\Leftrightarrow \quad \int_\alpha^x f(t)dt = \mathcal{O}(\int_\alpha^x g(t)dt)$ □

Такође, за следеће две леме ћемо претпоставити да важи и $\int_\alpha^x g(t)dt = \omega(1)$.

Лема 3.3.3. $f(x) = o(g(x)) \Rightarrow \int_\alpha^x f(t)dt = o(\int_\alpha^x g(t)dt)$

Доказ. Дефинишимо функцију $\varepsilon(x_0) := \sup\limits_{x > x_0}\big|\frac{f(x)}{g(x)}\big|$. Имамо:

$$f(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\big|\tfrac{f(x)}{g(x)}\big| = 0 \Rightarrow \limsup_{x\to+\infty}\big|\tfrac{f(x)}{g(x)}\big| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x_0\to+\infty}\varepsilon(x_0) = 0$$

За свако $x_0 > \alpha$ имамо:

$$\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{\int_\alpha^x f(t)dt}{\int_\alpha^x g(t)dt}\right| \le \lim_{x\to+\infty}\left|\frac{\int_\alpha^{x_0} f(t)dt}{\int_\alpha^x g(t)dt}\right| + \lim_{x\to+\infty}\left|\frac{\int_{x_0}^x f(t)dt}{\int_\alpha^x g(t)dt}\right| \le$$

$$\le 0 + \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_{x_0}^x |f(t)|dt}{\int_\alpha^x g(t)dt} \le \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_{x_0}^x \varepsilon(x_0)g(t)dt}{\int_\alpha^x g(t)dt} \le \lim_{x\to+\infty}\frac{\varepsilon(x_0)\int_\alpha^x g(t)dt}{\int_\alpha^x g(t)dt} = \varepsilon(x_0)$$

Пошто је x_0 произвољно велико, а однос интеграла је увек позитиван јер су и функције позитивне, следи, по теореми о два полицајца и лопову:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_\alpha^x f(t)dt}{\int_\alpha^x g(t)dt} = 0$$

□

Лема 3.3.4. $f(x) \sim g(x) \Rightarrow \int_\alpha^x f(t)dt \sim \int_\alpha^x g(t)dt$

Доказ. Користећи претходну лему и то да је $f(x) = g(x) + o(g(x))$, имамо:

$$\int_\alpha^x f(t)dt = \int_\alpha^x \big[g(x) + o(g(x))\big]dt = \int_\alpha^x g(t)dt + \int_\alpha^x o(g(t))dt =$$

$$= \int_\alpha^x g(t)dt + o\bigg(\int_\alpha^x g(t)dt\bigg) \Leftrightarrow \int_\alpha^x f(t)dt \sim \int_\alpha^x g(t)dt$$

□

Теорема 3.3.2. Ако $\lim\limits_{x\to+\infty}\sup\limits_{y>x}\big|f(y)-f(x)\big| = 0$, онда $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ постоји.

Доказ. $f(n)$ за целе n представља Кошијев низ и према томе конвергира ка неком броју L.

Из поставке следи да за произвољно $\varepsilon > 0$ постоји $x \in \mathbb{R}$ такво да

$$\sup_{y>x}\big|f(y)-f(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \big|L - f(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \sup_{y>x}\big|L-f(y)\big| < \sup_{y>x}\Big(\big|L-f(x)\big| + \big|f(x)-f(y)\big|\Big) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

□

Дефиниција 3.3.1. Интеграл $\int_\alpha^\infty f(x)dx$ је апсолутно конвергентан ако и само ако $\int_\alpha^\infty |f(x)|dx$ постоји (конвергира).

Теорема 3.3.3. Ако интеграл $\int_\alpha^\infty f(x)dx$ конвергира апсолутно онда је конвергентан.

Доказ. Нека је $F := \int_\alpha^\infty |f(x)|dx$. Имамо за произвољне $y > x \geq \alpha$:

$$\Big|\int_x^y f(t)dt\Big| \leq \int_x^y |f(t)|dt \leq \int_x^\infty |f(t)|dt = F - \int_\alpha^x |f(t)|dt$$

$$\Rightarrow \sup_{y>x}\Big|\int_x^y f(t)dt\Big| \leq F - \int_\alpha^x |f(t)|dt$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sup_{y>x}\Big|\int_x^y f(t)dt\Big| \leq F - \lim_{x\to+\infty}\int_\alpha^x |f(t)|dt = F - F = 0$$

По претходној теореми, функција $H(x) := \int_\alpha^x f(t)dt$ конвергира. □

Теорема 3.3.4. Нека је интеграл $\int_\alpha^\infty g(t)dt$ конвергентан. Тада ако је $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$, онда је и $\int_\alpha^\infty f(t)dt$ конвергентан интеграл.

Доказ. Интеграл $\int_\alpha^x |f(t)|dt$ монотоно расте са x и, по леми 3.3.2, је ограничен. Према томе, он мора да конвергира. Претходна теорема завршава доказ. □

3.4 Риманове леме

Метод Риманових сума је назив за било који метод апроксимирања одређеног-интеграла у коме се апроксимира део по део интеграла, а потом оцоне саберу. Један уобичајен и упрошћен начин за то је да се интервал прво подели на више једнаких, а затим, на сваком, функција апроксимира неком константном функцијом.

Рецимо да желимо да интегралимо од a до b функцију $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Тај интервал $I = [a, b]$ делимо на n једнаких: $I_i = [a + i\frac{b-a}{n}, a + (i+1)\frac{b-a}{n}] = [a_i, b_i]$, и сабирамо их: $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{b_i} f(x)dx$. Сада треба да апроксимирамо сваки сабирак $\int_{a_i}^{b_i} f(x)dx$ посебно. Нека је $A := \int_a^b f(x)dx$ и $A_i := \int_{a_i}^{b_i} f(x)dx$. Апроксимирамо константом:

$$A_i \approx B_i = \int_{a_i}^{b_i} f(\xi_i)dx = \frac{b-a}{n}f(\xi_i)$$

за неко $\xi_i \in I_i$. Након сабирања:

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)$$

Идеја је да узимамо произвољно n. Сада имамо слободу да бирамо коју страну ћемо да фиксирамо и апроксимирамо. Дакле, имамо два пута. Први је да фиксирамо I. Тада, у лимесу $n \to \infty$ сума се поклапа са дефиницијом површине под кривом функције. Управо зато је Риманова сума узета за дефиницију одређеног интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)$$

под још неким условима за ξ_i и I_i. Ако су сви ти услови задовољени, каже се да је функција f интеграбилна у Римановом смислу или Риман-интеграбилна на интервалу $[a,b]$. Други пут је да фиксирамо I_i. У овом случају застаћемо на најобичнијем поређењу величина A_i и B_i:

(1) ξ_i је минимум $\Rightarrow B_i \leq A_i$

(2) ξ_i је максимум $\Rightarrow B_i \geq A_i$

Коначан исход (након сабирања) је изузетно привлачан у укупно једном случају (или, рецимо, два): када су и функција f и њен први извод Df сталног знака.

Лема 3.4.1. Нека је $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ монотона на $[0,+\infty)$. Тада за свако $n \in \mathbb{N}$ важи:

$$(*) \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \geq \int_0^n f(x)dx \geq \sum_{k=1}^{n} f(k) \text{ , ако је } f \text{ нерастућа}$$

$$(**) \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \leq \int_0^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \text{ , ако је } f \text{ неопадајућа}$$

Доказ.

$$\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil \Rightarrow \begin{cases} f(\lfloor x \rfloor) \geq f(x) \geq f(\lceil x \rceil), & Df < 0 \\ f(\lfloor x \rfloor) \leq f(x) \leq f(\lceil x \rceil), & Df > 0 \end{cases}$$

$$(1) \sum_{k=0}^{n-1} f(k) = \int_0^n f(\lfloor x \rfloor)dx$$

$$(2) \sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) = \int_0^n f(\lceil x \rceil)dx$$

Применом леме 3.3.1 на функције $f(\lfloor x \rfloor)$, $f(x)$ и $f(\lceil x \rceil)$ заједно са заменама (1) и (2) доказ је завршен. $\square$

Лема 3.4.2. Нека су A, B и C функције : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и важи $\forall x > x_0$ $A(x) \leq C(x) \leq B(x)$ или $A(x) \geq C(x) \geq B(x)$. Тада је $C(x) = A(x) + \mathcal{O}(A(x) - B(x))$ и $A(x) = C(x) + \mathcal{O}(A(x) - B(x))$.

Доказ. Имамо $|C(x) - A(x)| + |C(x) - B(x)| = |A(x) - B(x)|$, па
$|C(x) - A(x)| \leq |A(x) - B(x)| \Rightarrow C(x) - A(x) = \mathcal{O}(A(x) - B(x))$ □

Лема 3.4.3. Ако је $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ монотона на $[0, +\infty)$ онда за све $x \in \mathbb{R}^+$ важи:

$$(*) \sum_{n=0}^{x} f(n) = \int_0^x f(t)dt + \mathcal{O}(1) \text{ , ако је } Df \leq 0$$

$$(**) \sum_{n=0}^{x} f(n) = \int_0^x f(t)dt + \mathcal{O}(f(x)) \text{ , ако је } Df \geq 0 \text{ и } \frac{f(\lfloor x+1 \rfloor)}{f(x)} = \mathcal{O}(1)$$

Доказ. За свако $x > 0$ имамо по леми 3.4.1:

$$\sum_{n=0}^{\lfloor x \rfloor} f(n) \gtrless \int_0^{\lfloor x+1 \rfloor} f(t)dt \gtrless \sum_{n=1}^{\lfloor x+1 \rfloor} f(n)$$

Па користећи лему 3.4.2 имамо:

$$\sum_{n=0}^{x} f(n) - \int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\lfloor x \rfloor} f(n) - \int_0^{\lfloor x+1 \rfloor} f(t)dt + \int_x^{\lfloor x+1 \rfloor} f(t)dt =$$

$$= \mathcal{O}\left(\sum_{n=1}^{\lfloor x+1 \rfloor} f(n) - \sum_{n=0}^{\lfloor x \rfloor} f(n) \right) + \mathcal{O}\Big(f(x) + f(\lfloor x+1 \rfloor) \Big) =$$

$$= \mathcal{O}\Big(f(\lfloor x+1 \rfloor) - f(0) \Big) + \mathcal{O}\Big(f(x) \Big) + \mathcal{O}\Big(f(\lfloor x+1 \rfloor) \Big) =$$

$$= \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}\Big(f(x) \Big) + \mathcal{O}\Big(f(\lfloor x+1 \rfloor) \Big)$$

Ако је функција нерастућа, друга два члана су такође $\mathcal{O}(1)$, а ако је неопадајућа, онда су сви чланови $\mathcal{O}(f(x))$. □

За суме $\sum_{n=0}^{x} f(n)$ интеграл $\int_0^x f(t)dt$ се зове Риманов интеграл и ова метода апроксимирања сума се зове Метод Римановог интеграла.

3.5 Елементарне оцене

Све "специјалне" функције (као на пример индикатор за просте, φ, τ, μ, ω, σ_k, Ω, λ, γ,...) које имају неку симетричну рекурентну везу са делиоцима свог аргумента често су непредвидиве. Не можемо знати ни ред величине вредности само на основу реда величине аргумента. Али, испоставља се да то можемо за "просечну вредност" првих неколико вредности таквих функција. На пример, можемо да одредимо ред величине функција $\pi(x) = \sum_{p\leq x} 1$, $\sum_{n\leq x} \varphi(n)$, $\sum_{n\leq x} \mu(n)$, итд. што и јесте оно чиме се овај ради бави.

Хајде да за почетак, уместо π, одаберемо неку другу специјалну функцију о којој већ знамо нешто. Кренимо од основне особине простих бројева: прости бројеви су недељиви. Притом, сваки природан број се на јединствен начин раставља на производ простих бројева.

Канонска факторизација:

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$$

Али, пошто нас не занимају производи него суме ставићемо обе стране под логаритам:

$$\ln n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \ln p_i$$

Пошто логаритму не само да знамо ред величине него му знамо и тачну вредност, он ће бити наша прва функција за испитивање. Па, узмимо онда суму:

$$\sum_{n\leq x} \ln n = \sum_{p\leq x} \ln p \cdot \delta(p, x)$$

где је $\delta(p, x)$ највећи степен простог броја p који дели $\lfloor x \rfloor!$. Испоставља се да и $\delta(p, x)$ можемо довољно добро да проценимо. Прва сума је у ствари $\ln(\lfloor x \rfloor!)$ и отуда идеја да је факторијел добра подлога за ову тему! Погодни су и изрази са њима као, на пример, биномни коефицијенти. Чебишев је први покушао да докаже теорему о простим бројевима користећи управо ове идеје и, не доказавши је, доказао је неке друге важне ствари. Време је да уведемо прву Чебишевљеву функцију $\vartheta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ која се појављује у скоро свакој наредној теореми:

$$\vartheta(x) := \sum_{p\leq x} \ln p$$

Лема 3.5.1. За свако просто p и реално $x > 1$ важи

$$\delta(p, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{x}{p^i} \right\rfloor$$

Доказ. По Лагранжовој формули је

$$\delta(p, x) = \nu_p(\lfloor x \rfloor !) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{p^i} \right\rfloor$$

где је $\nu_p(n)$ симбол који је Лежандр користио да запише највећи степен простог броја p који дели n. Пошто је p^i цело, имамо да је

$$\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{p^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{p^i} \right\rfloor$$

□

Лема 3.5.2. За свако просто p, реално $x > 1$ и природан степен k за који важи $p^{k+1} > x$ имамо да је

$$\delta(p, x) = \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{x}{p^i} \right\rfloor$$

Доказ. За свако $i > k$ имамо $p^i \geq p^{k+1} > n \Rightarrow \frac{n}{p^i} < 1 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{p^i} \right\rfloor = 0$. Па:

$$\delta(p, x) - \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{x}{p^i} \right\rfloor = \sum_{i=k+1}^{\infty} \left\lfloor \frac{x}{p^i} \right\rfloor = \sum_{i=k+1}^{\infty} 0 = 0$$

□

Теорема 3.5.1. За свако природно n важи:

$$\ln(n)\big[\pi(2n) - \pi(n)\big] < \vartheta(2n) - \vartheta(n) \leq \ln \binom{2n}{n} \leq \ln(2n)\pi(2n)$$

Доказ. Нека је $\beta(p, n)$ највећи степен броја p који дели $\binom{2n}{n}$: $\beta(p, n) := \nu_p\big(\binom{2n}{n}\big)$.

Имамо да је $\beta(p, n) = \delta(p, 2n) - 2\delta(p, n)$.

Нека је $k \in \mathbb{N}$ такво да $p^{k+1} > 2n \geq p^k$. По леми 3.5.2 важи:

$$\beta(p, n) = \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{2n}{p^i} \right\rfloor - 2\sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor = \sum_{i=1}^{k} \left(\left\lfloor 2\frac{n}{p^i} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor \right) \leq \sum_{i=1}^{k} 1 = k$$

$$\Longrightarrow p^{\beta(p,n)} \leq p^k \leq 2n$$

Сваки прост број p, за који је $n < p \leq 2n$, не дели $n!$, али дели $(2n)!$ и то тачно једанпут. Зато је за свако такво p $\beta(p,n) = 1$.

Коначно можемо да закључимо:

$$\prod_{n<p\leq 2n} n < \prod_{n<p\leq 2n} p \leq \prod_{p\leq 2n} p^{\beta(p,n)} \leq \prod_{p\leq 2n} (2n)$$

Приметимо:

$$\prod_{n<p\leq 2n} n = n^{\pi(2n)-\pi(n)}$$

$$\prod_{n<p\leq 2n} p = e^{\vartheta(2n)-\vartheta(n)}$$

$$\prod_{p\leq 2n} p^{\beta(p,n)} = \binom{2n}{n}$$

$$\prod_{p\leq 2n} (2n) = (2n)^{\pi(2n)}$$

Логаритмовањем након примењивања ових смена доказ је завршен. □

Теорема 3.5.2. За свако реално $x > 1$ важи

$$\vartheta(x) < 2\ln 2 \cdot x + \frac{\ln^2 x}{\ln 2}$$

Доказ. Из претходне теореме имамо да је за свако $n \in \mathbb{N}$

$$\vartheta(2n) - \vartheta(n) \leq \ln\binom{2n}{n} < \ln\left((1+1)^{2n}\right) = 2n\ln 2$$

Сада можемо да за свако реално $x > 1$ кажемо

$$\vartheta(2x) - \vartheta(x) = \vartheta(\lfloor 2x\rfloor) - \vartheta(\lfloor x\rfloor) \leq \ln\lfloor 2x\rfloor + \vartheta(2\lfloor x\rfloor) - \vartheta(\lfloor x\rfloor) <$$

$$< \ln\lfloor 2x\rfloor + 2\lfloor x\rfloor \ln 2 \leq \ln(2x) + 2x\ln 2$$

Или, еквивалентно: $\quad \vartheta(x) - \vartheta(\frac{x}{2}) < \ln(x) + x\ln 2$

Што нам омогућава да спустимо суму до нуле:

$$\vartheta(x) = \sum_{i=1}^{\log_2 x} \left[\vartheta\Big(\frac{x}{2^{i-1}}\Big) - \vartheta\Big(\frac{x}{2^i}\Big)\right]$$

јер се сви сабирци поништавају осим првог који је једнак $\vartheta(x)$ и последњег који је нула: $-\vartheta(\frac{x}{2^i}) = 0$:

$$2^{\lfloor \log_2 x \rfloor} > 2^{\log_2 x - 1} = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2^{\lfloor \log_2 x \rfloor}} < 2 \Rightarrow \vartheta\left(\frac{x}{2^i}\right) \leq \vartheta(2) = 0$$

и да на њу (суму) применимо неједнакост:

$$\vartheta(x) < \sum_{i=1}^{\log_2 x} \left[\ln\left(\frac{x}{2^{i-1}}\right) + x\frac{2\ln 2}{2^i} \right] < \log_2 x \cdot \ln x + 2\ln 2 \cdot x$$

□

Теорема 3.5.3. За све реалне $x > 2$ важи

$$\pi(x) > \frac{x \ln 2}{\ln x} - 2$$

Доказ. За почетак, испитајмо мало $\binom{2n}{n}$. У биномном развоју израза $(1+1)^{2n}$ имамо укупно $n+1$ биномних коефицијената од којих је $\binom{2n}{n}$ највећи. Зато он сигурно није мањи од њиховог просека:

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{n+1}$$

Сад, по теореми 3.5.1 имамо:

$$\ln(2n)\pi(2n) \geq \ln\binom{2n}{n} \geq \ln\frac{2^{2n}}{n+1} = 2n\ln 2 - \ln(n+1)$$

$$\Rightarrow \pi(2n) \geq \frac{2n\ln 2}{\ln(2n)} - \frac{\ln(n+1)}{\ln(2n)} \geq \frac{2n\ln 2}{\ln(2n)} - 1$$

Сада можемо да проширимо ово на реалне $x \in [2n, 2n+2]$ за свако природно n. Тада је $\pi(x) + 1 \geq \pi(2n+2)$ јер, у том интервалу само $2n+1$ може бити прост број. Па имамо:

$$\pi(x) + 1 \geq \pi(2n+2) > \frac{(2n+2)\ln 2}{\ln(2n+2)} - 1 \geq \frac{x\ln 2}{\ln x} - 1$$

јер је $\frac{x\ln 2}{\ln x} - 1$ растућа функција. □

У првој теореми већ, видели смо, појавила се функција $\vartheta(x)$ која је слична нашој $\pi(x)$. Разликује се утолико што је однос сабирака у њиховим дефиницијама нека функција, а слична је због тога што је та функција "лепа" (логаритам, $\ln n$). Ради лакше илустрације дефинисаћемо:

$$a_n := \begin{cases} \ln n, & n \text{ је прост} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \qquad p_n := \begin{cases} 1, & n \text{ је прост} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Те две функције (или низа) су сличне јер за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $a_n = \ln n \cdot p_n$. И сада дефиниције за ϑ и π изгледају:

$$\vartheta(x) := \sum_{n \le x} a_n \qquad \pi(x) := \sum_{n \le x} p_n$$

Теорема о дистрибуцији простих бројева тврди да је $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$ од чега смо ми већ доказали $\pi(x) = \Omega(\frac{x}{\ln x})$. Успут, сличном методом смо добили и $\vartheta(x) = \mathcal{O}(x)$. Однос оцена (функција $\frac{x}{\ln x}$ и x) је $\ln x$, баш онај однос сабирака у дефиницијама две функције које оцењујемо, π и ϑ. То нам говори да однос сабирака има неке уске везе и са односом самих функција. Да докажемо ту везу помаже нам управо Абелова лема са почетка овог поглавља!

Теорема 3.5.4. За функције $\pi(x)$ и $\vartheta(x)$ важи веза:

$$\pi(x) \sim \frac{\vartheta(x)}{\ln x}$$

Доказ. Абелова лема нам директно каже

$$\pi(x) = \sum_{n \le x} a_n \frac{1}{\ln n} = \vartheta(x)\frac{1}{\ln x} + \int_1^x \vartheta(t)\frac{dt}{t\ln^2 t}$$

$$\Rightarrow \pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{\mathcal{O}(1)}{\ln^2 t} dt \quad \text{по теореми 3.5.2}$$

$$\Rightarrow \pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\ln x} + \int_2^x \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\ln^2 t} - \frac{2}{\ln^3 t}\Big) dt = \frac{\vartheta(x)}{\ln x} + \mathcal{O}\Big(\frac{x}{\ln^2 x}\Big) \quad \text{по леми 3.3.2}$$

$$\Rightarrow \pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\ln x} + o(\pi(x)) \quad \text{по теореми 3.5.3}$$

$$\Rightarrow \pi(x) \sim \frac{\vartheta(x)}{\ln x}$$

□

Прва последица је први еквивалент теореми о дистрибуцији простих бројева:

Теорема 3.5.5. Теорема о дистрибуцији простих бројева је еквивалентна са:

$$\vartheta(x) \sim x$$

Друга последица је да наше оцене имају своје еквиваленте парњаке за супротну функцију. Другим речима,

$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)\ln x}{x} = \limsup_{x\to+\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} \leq 2\ln 2 \quad \text{и} \quad \liminf_{x\to+\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = \liminf_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)\ln x}{x} \geq \ln 2$$

Водећи рачуна о свим остацима могуће је постићи:

Теорема 3.5.6. За све $x > x_0$, за неко $x_0 \in \mathbb{R}$, важи:

$$\pi(x) < 2\ln 2\frac{x}{\ln x} + \frac{2x}{\ln^2 x} \qquad \text{и} \qquad \vartheta(x) > x\ln 2 - \frac{2x}{\ln x}$$

Узимајући све ово у обзир, постигли смо $\pi(x) = \Theta(\frac{x}{\ln x})$ и $\vartheta(x) = \Theta(x)$.

Овако је изгледао Чебишевљев неуспели покушај да докаже теорему о простим бројевима. Ипак, успео је да постигне лепе резултате. Ако са α означимо $\liminf \frac{\pi(x)\ln x}{x}$, а са β означимо $\limsup \frac{\pi(x)\ln x}{x}$, ми смо доказали $2\alpha - \beta \geq 0$. Чебишев је отишао корак даље и, користећи триномне коефицијенте (као $\frac{(6n)!}{n!(2n)!(3n)!}$) и сличне ствари, сузио границе на $\alpha \gtrsim 0.9$ и $\beta \lesssim 1.1$. Тиме је доказао Бертрандов постулат (који каже да је $\pi(2x) - \pi(x) > 0$) тако што је $\pi(2x) - \pi(x) = \Omega(\frac{(2\alpha-\beta)x}{\ln x})$, а он је доказао $2\alpha - \beta > 0$.

До ових резултата смо дошли посматрајући углавном само биномне коефицијенте који издвајају просте бројеве на интервалима $(n, 2n)$. Сами факторијели не издвајају ништа, али видећемо да и они дају лепе резултате сада, када већ знамо нешто о овим функцијама.

Теорема 3.5.7.

$$\sum_{p\leq x} \frac{\ln p}{p} = \ln x + \mathcal{O}(1)$$

Доказ. По Римановој леми следи:

$$(*) \quad \frac{\ln(\lfloor x\rfloor!)}{x} = \frac{\sum_{n\leq x}\ln n}{x} = \frac{x\ln x - x + \mathcal{O}(\ln x)}{x} = \ln x + \mathcal{O}(1)$$

У уводу смо још објаснили:

$$(**) \quad \ln(\lfloor x\rfloor!) = \sum_{p\leq x} \ln p \cdot \delta(p, x)$$

и обећали да делту можемо лепо да оценимо:

$$(***) \quad \frac{x}{p} - 1 < \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor < \delta(p,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{x}{p^k} \right\rfloor < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{p^k} = \frac{x}{p-1}$$

Дефинишимо две функције:

$$A(x) := \sum_{p \le x} \frac{\ln p}{p} \qquad \text{и} \qquad B(x) := \sum_{p \le x} \frac{\ln p}{p-1}$$

Из свега овога добијамо:

$$(1) \qquad \ln(\lfloor x \rfloor !) > \sum_{p \le x} \ln p \Big(\frac{x}{p} - 1 \Big) = x \sum_{p \le x} \frac{\ln p}{p} - \sum_{p \le x} \ln p = xA(x) - \vartheta(x)$$

$$\Rightarrow A(x) - \mathcal{O}(1) = \frac{xA(x)}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x} < \frac{\ln(\lfloor x \rfloor !)}{x} = \ln x + \mathcal{O}(1)$$

и слично,

$$(2) \qquad \ln(\lfloor x \rfloor !) < \sum_{p \le x} \ln p \frac{x}{p-1} = xB(x) \Rightarrow B(x) > \ln x + \mathcal{O}(1)$$

Нису $A(x)$ и $B(x)$ сличне безвезе. Сличне су и њихова разлика је $\mathcal{O}(1)$:

$$B(x) - A(x) = \sum_{p \le x} \frac{\ln p}{p(p-1)} \le \sum_{n=2}^{x} \frac{\ln n}{n(n-1)} \le \sum_{n=2}^{x} \frac{2 \ln n}{n^2} \le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 \ln n}{n^2} =$$

$$= 2 \Big(\frac{-\ln t - 1}{t} \Big) \Big|_2^{\infty} + \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(1) \quad \text{по Римановој леми}$$

Спајајући (1) и (2) добијамо

$$A(x) - \mathcal{O}(1) < \ln x + \mathcal{O}(1) < B(x)$$

Па, по леми 3.4.2 имамо

$$A(x) - \mathcal{O}(1) = \ln x + \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(B(x) - A(x) + \mathcal{O}(1)) \Rightarrow A(x) = \ln x + \mathcal{O}(1)$$

$\square$

Ова теорема је веома важна јер је основ за многе елементарне доказе теореме о простим бројевима који су касније пронађени. Ти докази су касније инспирисали развој једне гране Тауберовске теорије коју ћемо мало касније поменути. Поред тога, она има и једноставније последице.

Теорема 3.5.8. Постоји константа M таква да важи:

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p}=\ln\ln x+M+o(1)$$

Доказ. Доказ је врло кратак и јасан. Први корак је да употребимо Абелову лему на ову суму и суму из претходне теореме јер су оне сличне (*задржаћемо дефиницију за* $A(x)$ *из претходне теореме*):

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p}=\sum_{p\le x}\frac{\ln p}{p}\frac{1}{\ln p}=\frac{A(x)}{\ln x}+\int_2^x\frac{A(t)}{t\ln^2 t}dt=$$

$$=\frac{\ln x+\mathcal{O}(1)}{\ln x}+\int_2^x\frac{\ln t+\mathcal{O}(1)}{t\ln^2 t}dt=1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{\ln x}\Big)+\int_2^x\frac{dt}{t\ln t}+\int_2^x\mathcal{O}\Big(\frac{1}{t\ln^2 t}\Big)dt$$

Последњи интеграл по теореми 3.3.4 конвергира, рецимо ка броју M'. Имамо:

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p}=\ln\ln x-\ln\ln 2+1+M'+o(1)$$

$$\Rightarrow M=M'+1-\ln\ln 2$$

□

Ова теорема нам отвара пут ка првом нетривијалном резултату који говори о асимптотском расту парцијалне суме неке мултипликативне функције.

Дефиниција 3.5.1. $\omega(n)$ је мултипликативна функција која за природно n враћа број **различитих** простих делилаца броја n

Теорема 3.5.9.

$$\sum_{n\le x}\omega(n)=x\ln\ln x+Mx+o(x)$$

Доказ. Инциденције када прост број $p\le x$ дели природан број $n\le x$ можемо бројати на два начина: по n и по p. То је оно што спаја ову теорему са претходном и што суме испод говоре:

$$\sum_{n\le x}\omega(n)=\sum_{n\le x}\sum_{p|n}1=\sum_{p\le x}\sum_{kp\le x}1=\sum_{p\le x}\left\lfloor\frac{x}{p}\right\rfloor=\sum_{p\le x}\Big(\frac{x}{p}+\mathcal{O}(1)\Big)=$$

$$=x\sum_{p\le x}\frac{1}{p}+\mathcal{O}(\pi(x))=x\ln\ln x+Mx+o(x)+\mathcal{O}\Big(\frac{x}{\ln x}\Big)=x\ln\ln x+Mx+o(x)$$

□

Овај резултат је користан и у пракси зато што представља сложеност алгоритама који рачунају нешто за свако $n \leq x$ уз помоћ рекурзије која траје $\mathcal{O}(\omega(n))$ времена. Пример таквог алгоритма је Ератостеново сито. Управо су због оваквих и сличних алгоритама корисне величине парцијалних сума мултипликативних функција.

Чебишев је, дакле, успео да докаже само $\pi(x) = \Theta(\frac{x}{\ln x})$, али не и да однос ових функција конвергира. Зато је претпоставио да конвергира и доказао да тада он мора да конвергира баш јединици, као што теорема о простим бројевима и предвиђа:

Теорема 3.5.10.

$$\pi(x) \sim \alpha \frac{x}{\ln x} \Rightarrow \alpha = 1$$

Доказ. Услов је еквивалентан са

$$\vartheta(x) \sim \alpha x$$

Применимо Абелову лему на суму $\frac{\ln p}{p}$, а потом, лему 3.3.4 на интеграл:

$$\ln x \sim \sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p} = \frac{\vartheta(x)}{x} + \int_1^x \frac{\vartheta(t)}{t^2} dt = \mathcal{O}(1) + \alpha \ln x + o(\ln x) \sim \alpha \ln x$$

Добијамо $\alpha = 1$. □

За разумевање везе између простих бројева и комплексне анализе потребне су неке теореме које смо навели у овој глави. Остали елементарни резултати из ове области математике су у стварности били инспирисани комплексном анализом. Тако да, не би било фер да сада причамо о њима.

4

Увод у теорију

Ојлер је први пронашао идентитет који веома смело открива структуру природних бројева и доводи до једног од резултата који нисмо могли да претпоставимо док га нисмо до краја извели. Идентитет је:

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot ... = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ...$$

Са леве стране су разломци $\frac{p}{p-1}$, за све просте p, а са десне стране је обична хармонијска сума.

Пошто десна страна (па и лева) дивергира, знак једнакости не значи оно што углавном значи (једнакост две вредности, јер дивергирајућој суми не можемо приписати вредност), већ говори да су две стране једнаке у неком другом смислу:

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot ... = \Big(1 + \frac{1}{2-1}\Big)\Big(1 + \frac{1}{3-1}\Big)\Big(1 + \frac{1}{5-1}\Big)... =$$

$$= \Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ...\Big)\Big(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ...\Big)... = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2 \cdot 3} + ... =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

Видимо да је једнакост била у смислу једнакости скупова сабирака. Када леву страну измножимо, скуп чланова/сабирака са те леве стране је исти као и са десне. Даље, ако занемаримо разлику та два значења знака једнакости, стављајући обе стране Ојлеровог идентитета под логаритам, на левој се издвајају прости бројеви:

$$\ln\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ...\Big) + \ln\Big(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ...\Big) + \ln\Big(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + ...\Big) + ... =$$

$$= \frac{1}{2} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{2^2}\Big) + \frac{1}{3} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{3^2}\Big) + \frac{1}{5} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{5^2}\Big) + ... =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ...\Big) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \mathcal{O}(1) =$$
$$= \ln\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ...\Big)$$

Ово је првобитно био само Ојлеров доказ да простих бројева има бесконачно, шта више, да је хармонијска сума простих бројева дивергирајућа (јер, када би конвергирала, и обична хармонијска сума би конвергирала). Десна страна расте као $\ln\ln$ (пошто сама хармонијска сума расте већ као $\ln$). Можемо претпоставити да и лева страна (хармонијска сума простих), исто тако, расте као и десна, као $\ln\ln$.

Ојлер је први увео и функцију

$$f(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + ...$$

Коју је тек Риман назвао зета (ζ). И за функцију f, аналогно, постоји исти Ојлеров идентитет.

На сличан начин, посматрајући обе стране израза за $\frac{d}{ds}\ln(f(s))$, можемо доћи до претпоставке да је и $\vartheta(x) \sim x$. Ми немамо разлога да верујемо да обе стране расту истом брзином, али, већ смо доказали, оне заиста расту истом брзином. То што нам је идентитет **одмах** дао идеју о нечему **тачном** говори нам да смо са њим на правом путу да откријемо нешто ново и **фундаментално** о структури природних бројева. Ако добро разумемо разлог зашто обе стране расту истом брзином, можда ћемо схватити и зашто је $\vartheta(x) \sim x$. Сада нам само треба математика која ће формализовати ове идентитете. Проблем је, дакле, била сума (Σ). Сумирање овде није могуће (јер обе стране дивергирају), па можемо да пробамо да уопштимо појам сумирања и схватимо га у што ширем смислу. Уз мало труда, наћи ће се нека грана математике у којој ће суме Ојлеровог идентитета бити добро дефинисане.

5

Тауберовска теорија (*Tauberian theory*)

Када низ не конвергира, можемо осетити и разликовати два начина дивергирања: један је када низ има лимес у бесконачности ($+\infty$ или $-\infty$), а други је када осцилује. Под осциловањем, мисли се на то да ни $+\infty$ ни $-\infty$ није лимес.

У првом случају, не можемо низу да припишемо величину као просто вредност лимеса (јер он заправо није број). Ако хоћемо да му припишемо неку величину, мораће то да буде величина у неком другом смислу. Један, устаљени, је асимптотски раст функције. На пример, харминијска сума расте као ln. У другом случају, када низ осцилује, ни овај начин мерења величине не пролази. Тауберовска теорија се у основи бави управо овим: различитим принципима мерења величина. Узмимо за пример низ $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$. Низ алтернира између 0 и 1. Дакле, врти се око $\frac{1}{2}$. То $\frac{1}{2}$ можемо схватити као просечну вредност низа:

$$\frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_n$$

То је један од основних принципа додељивања величине низовима.

У теорији сретаћемо се и са парцијалним сумама:

Дефиниција 5.1. Сваки низ a има своју парцијалну суму, низ s, дефинисан као:

$$s_n := \sum_{i=1}^{n} a_i \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Нека је сада s парцијална сума неког низа комплексних бројева a. Тада:

(1) Ако s конвергира ка L, онда кажемо да ред $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ условно конвергира (или само конвергира) ка L (ово L се поклапа са дефиницијом обичне бесконачне суме)

(2) Ако ред $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ конвергира ка L, онда кажемо да ред $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ апсолутно конвергира ка L

(3) Ако s има своју "просечну величину", кажемо да ред $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ има Цезарову суму и тај принцип/метода сумирања се зове Цезарово сумирање:

Дефиниција 5.2. Нека је s парцијална сума низа a. **Цезарова сума** реда $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ је дефинисана као:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} s_i$$

и ако она постоји кажемо за ред да је **Цезаро-сумабилан**.

Запаска: Ако ред $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ конвергира ка L онда има и Цезарову суму и она је, такође, једнака L.

Ово нам говори да је Цезарово сумирање јаче и општије од обичног сумирања у смислу да је скуп низова који имају обичну суму само подскуп скупа низова који имају Цезарову суму. Следеће битно сумирање је Абелово, које је још јаче од Цезаровог:

Дефиниција 5.3. Нека је a низ комплексних бројева индексиран од 0. Његова **Абелова сума** је дефинисана као:

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Сваки низ који има Цезарову суму има и Абелову суму и те две суме су исте. Али обратно не мора да важи:

Низ $a_n = n \cdot (-1)^{n+1}$ нема ни обичну ни Цезарову суму, али има Абелову и једнака је $\frac{1}{4}$.

Дакле, ред који има општију суму не мора да има и мање општу суму. Да би имао и мање општу суму, потребно му је још неко својство, још неки услов. Такав услов се назива Тауберовски услов (Tauberian condition). Теореме које наводе те услове се зову Тауберовске теореме (Tauberian theorem). Оне су облика: ако ред низа a има A-суму и задовољава услов U, онда ред низа a има и B-суму, и (углавном, што да не) те две суме су једнаке по вредности.

Прву теорему тог типа је пронашао и записао Алфред Таубер 1897. године:

Теорема 5.1. (Прва Тауберова теорема) Ако је Абелова сума реда Σa_n једнака s и $a_n = o(\frac{1}{n})$, онда ред Σa_n конвергира ка s.

Теорема 5.2. (Друга Тауберова теорема) Ред Σa_n конвергира ка s ако и само ако важе два услова:

(1) Абелова сума реда постоји и једнака је s.

(2) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k = o(n)$

Коревар у својој књизи [1] говори да је прва Тауберова теорема основа целе теорије

Око 1910. године Харди и Литлвуд су објавили рад (*референца се може се наћи у [1]*) са мноштвом Тауберовских теорема и у част Тауберу дали име теорији Тауборовска теорија. Најважнији резултати у њиховом раду су били:

Теорема 5.3. (Литлвудова теорема) Ако је Абелова сума реда Σa_n једнака s и $a_n = \mathcal{O}(\frac{1}{n})$, онда ред Σa_n конвергира ка s.

Теорема 5.4. (Харди-Литлвудова теорема) Постоје две формулације:

(1) Нека је a низ ненегативних реалних бројева индексиран од 0. Ако при $x \to 1^-$ важи:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \sim \frac{1}{1-x}$$

онда при $n \to \infty$ важи:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sim n$$

(2) Нека за низ a важи исто што и у првој формулацији. Ако при $y \to 0^+$ важи:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-ny} \sim \frac{1}{y}$$

онда, такође, при $n \to \infty$ важи:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sim n$$

Друга формулација се добија из прве увођењем смене $x = e^{-y}$

Касније, њих двојца су успели да у своју заједницку теорему убаце $a_n = \ln p$ и добију $\vartheta(x) \sim x$, еквивалент теореми о простим бројевима. Пре њиховог успеха, развоју теорије допринела је управо потрага за што једноставнијим доказом теореме о простим бројевима, једноставнијег од већ постојећих које су нашли Хадамард и Ла Вале Пусен 1896. године [2]. Највише је допринео математичар

Винер својим радом 1932. [3] После Винера, највећи допринос теорији дао је Земунски математичар Јован Карамата углавном тако што је масивно упростио већ постојеће доказе неких теорема [1].

Због велике употребе степених редова, комплексна анализа се издвојила као врло погодно тло за теорију. Многи принципи сумирања и тауберовски услови су представљени у терминима комплексне анализе и многи докази се ослањају на градиво комплексне анализе. Комплексна теорија има два корена: Фатуова теорема (степени редови) и Ландаове теореме (Дирихлеови редови) (*помиње Коревар у [1]*). Даљим развојем, испоставља се да је пут до теореме о простим пројевима преко Дирихлеових редова најкраћи и најбоље одржава баланс између Тауберовске и комплексне математике. Не захтева превише предзнања из комплексне анализе, ни из Тауберовске теорије.

Није изненађење што је Хардију и Литлвуду требало доста времена да изведу доказ теореме о простим бројевима. Структура простих бројева и степених редова има мало чега заједничког, па је веома тешко добити $a_n = \ln p$. Дирихлеови редови благо мењају структуру степених редова, а касније једна тауберовска теорема за дирихлеове редове, која је аналог Харди-Литлвудове теореме за степене редове завршава доказ.

Једно богатство холоморфних функција су Кошијеви интеграли. Кошијеви интеграли и Кошијева теорема не спомињу чињеницу да су холоморфне функције аналитичке, шта више, управо Кошијеви интеграли се користе за доказ те теореме. Тако да, Кошијеви интеграли су нешто основније од постојања Тејлоровог развоја и то својство ће бити један од разлога зашто ћемо желети да сачувамо холоморфност Дирихлеових редова.

Докази свих познатих Тауберовских теорема могу се наћи у Кореваровој књизи [1]

6

Дирихлеови редови

Да бисмо знали шта треба да мењамо у степеним редовима, треба да видимо прво шта то не ваља у њиховој структури? У принципу, желимо да манипулишемо коефицијентима као што то већ знамо због генераторских функција. Ако су a, b и c низови коефицијената степених редова функција f, g и h, онда је:

(1) (сабирање) $c_n = a_n + b_n \iff h(x) = f(x) + g(x)$

(2) (диференцирање) $b_n = (n+1)a_{n+1} \iff g = Df$

(3) $b_{n+1} = a_n \iff g(x) = xf(x)$

(4) (множење, уопштење трећег) При множењу функција коефицијенти **конволуирају**:

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) \iff c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j \iff c = a * b$$

Заиста нећемо лако доћи до $a_n = \ln p$ само овим основним манипулисањем (као што би Харди и Литлвуд хтели). Методе (1), (2) и (4) мењају величине чланова и цео скуп чланова после њих се мења. (1) ће важити за све редове, па не морамо да бринемо за то. Од осталих, (4) има највећи потенцијал јер конволуција није "локални" оператор (у неком смислу) па првенствено желимо тај метод да уопштимо и променимо, али тако да не изгубимо остала битна својства реда. Када бисмо могли да користимо методу (2) то би значило да је ред диференцијабилан. Другим речима, да је холоморфан; и то је то својство реда које желимо да задржимо након промене конволуције.

6.1 Мењање реда: Конволуција

Да бисмо уопштили конволуцију, треба прво да видимо одакле она потиче. Очигледно се испољава при множењу два реда. Посматрајмо сада производ два реда: један је $a_n x^n$, а други $b_n x^n$.

Производ два степена реда можемо да запишемо као збир производа сваког члана првог реда са сваким чланом другог реда. Ако оба реда конвергирају апсолутно, и овај "производ" ће конвергирати апсолутно (доказаћемо касније). За степене редове знамо да имају своју област апсолутне конвергенције (ако уопште конвергирају на неком диску око нуле). Зато, добијене чланове можемо уредити како год желимо. Добијене чланове, облика mx^n, можемо уредити по n, у неопадајућем поретку (да n не опада, као што иначе и записујемо степене редове). Чланова облика mx^n за фиксно n има коначно много, па је њихов збир добро дефинисан: нека се збир коефицијената уз њих зове c_n. Да не бисмо више пута писали x^n писаћемо само $c_n x^n$ одједном, што је већ збир свих чланова са x^n. Укупна сума се овиме не мења. Тако добијамо коефицијенте за производ два степена реда. x^n ће се појавити међу новим члановима кад год је збир степена чланова које множимо једнак n; $x^i \cdot x^j = x^n \Leftrightarrow i + j = n$, па је $c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$. Низ c је конволуција низа a и низа b. Структура те конволуције зависи од адитивне структуре скупа степена, $\mathbb{N}_0$.

Ако променимо скуп степена (да не буде више $\mathbb{N}_0$), промениће се и његова адитивна структура и, тиме, структура конволуције. Идаље, тај нови скуп, назовимо га L, мора да задовољава неке услове:

(1) да је подскуп $\mathbb{R}$

(2) да све његове елементе можемо да уредимо у растући низ (низ λ)

(3) да буде затворен са сабирањем (да би сваки новонастали члан имао степен из L и тако цео нови ред био ред истог типа, типа L)

(4) да садржи нулу (без нуле, скуп свих редова типа L са множењем гради полугрупу; са нулом гради групу; разлика је у постојању неутралног и инверзног реда)

Из ова четири услова следи и тај да ниједан елемент из L није негативан (особина *5*). Претпоставимо супротно: нека је $h < 0$ у L. Онда је за свако n из $\mathbb{N}$, nh такође у L (због (3)) па инфимум скупа не постоји $\Rightarrow$ (2) није тачно. Контрадикција.

6.2 Мењање реда: Холоморфност

Први проблем који се мора јавити са било којим скупом $L \neq \mathbb{N}_0$ је холоморфност: x^t је холоморфно у 0 ако и само ако је $t \in \mathbb{N}_0$. За све остале t, x^t није холоморфно у 0:

за било које $h \neq 0$ из $\mathbb{C}$ и било које t из $\mathbb{R}$, можемо направити дефиницију за x^t тако да је x^t холоморфно у h. Једино за $h = 0$ не можемо $\Rightarrow$ 0 је сингуларитет.

Композиција две холоморфне функције је опет холоморфна функција. Зато уместо x можемо писати неки други израз. Ако бисмо x^t прво композитовали са неком функцијом која је холоморфна на целом скупу $\mathbb{C}$ и која слика $\mathbb{C}$ у $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ отарасили бисмо се овог сингуларитета. Сингуларитет нам смета јер са њим ћемо можда бити приморани да интегралимо по Римановој површи. Назовимо такву функцију што пресликава $\mathbb{C}$ у $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ словом g. Холоморфност задржавамо због постојања извода. Да бисмо могли да примењујемо матоду (2), извод реда типа L треба да буде, поново, ред типа L. За свако i треба да постоји j такво да је

$$\frac{d}{dx} g(x)^{\lambda_i} = const \cdot g(x)^{\lambda_j}$$

Због произвољности скупа L, било би најбоље да λ_j не зависи од λ_i или да су барем они једнаки, тј. да је $j = i$:

$$\frac{d}{dx} g(x)^{\lambda_i} = const \cdot g(x)^{\lambda_i} \Leftrightarrow \frac{\frac{d}{dx} g(x)^{\lambda_i}}{g(x)^{\lambda_i}} = const \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \ln\left(g(x)^{\lambda_i}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_i \frac{d}{dx} \ln\big(g(x)\big) = const$$

Пошто је i произвољно, специјалан случај $\lambda_i = 0$ можемо изоставити. Следи да је

$$\frac{d}{dx} \ln\big(g(x)\big) = const$$

Интегралимо:

$$\ln\big(g(x)\big) = x * const$$

Експонентујемо:

$$g(x) = e^{x * const}$$

Биће најбезболније да узмемо $const = -1$. Нашли смо функцију g! Функција $e^{-x\lambda}$ је холоморфна на целом $\mathbb{C}$ за свако λ, што значи да она ниједан број x не слика у 0. А извод те функције је:

$$\frac{d}{dx} e^{-x\lambda_i} = -\lambda_i e^{-x\lambda_i}$$

Диференцирање реда спушта степене у коефицијенте.

Сада можемо написати општи облик реда, такозвани општи Дирихлеов ред:

Дефиниција 6.2.1. Општи Дирихлеов ред $D(\lambda, a, s)$ је дефинисан као:

$$D(\lambda, a, s) := \sum_{i=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_i s} \text{ или } D(\lambda, a, s) := \sum_{i=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_i s}$$

где је:

s - аргумент реда: комплексан број, ред је увек функција од s
a - коефицијенти реда: низ комплексних бројева
λ - тип реда: растући низ позитивних реалних бројева

Пише се само $D(a,s)$ ако се тип већ зна или подразумева, или $f(s)$, као функција од s, ако се и коефицијенти знају или подразумевају.

6.3 Скуп L

Хајде да сада већ одредимо скуп L. Ми желимо да истражујемо мултипликативну структуру скупа $\mathbb{N}$ (не адитивну), па желимо да адитивна структура скупа L буде иста као мултипликативна структура скупа $\mathbb{N}$ (због конволуције). Множење на скупу природних бројева је изоморфно са сабирањем на скупу логаритама природних бројева. Јер, за све x,y и z из $\mathbb{C}$ (не само $\mathbb{N}$) важи $xy = z \Leftrightarrow \ln(x) + \ln(y) = \ln(z)$. Дакле, $L = \{\ln(n) | n \in \mathbb{N}\}$. Овакав скуп L задовољава сва четири услова. Дирихлеов ред типа L се зове просто Дирихлеов ред, обичан Дирихлеов ред:

Дефиниција 6.3.1. Дирихлеов ред $D(a,s)$ је дефинисан као:

$$D(a,s) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e^{-s})^{\ln(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e^{\ln(n)})^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

где су a и s коефицијенти и аргумент реда, као и у општим Дирихлеовим редовима.

6.4 Дирихлеова конволуција

Хајде сад да видимо какав оператор смо добили. Множење два Дирихлеова реда је изоморфно примењивању Дирихлеове конволуције на коефицијенте та два реда.

Ако је $D(c,s) = D(a,s) \cdot D(b,s)$, онда важи:

$$c_n = \sum_{\lambda_i + \lambda_j = \lambda_n} a_i b_j = \sum_{\ln(i)+\ln(j)=\ln(n)} a_i b_j = \sum_{ij=n} a_i b_j$$

Биће лакше да испитујемо Дирихлеову конволуцију ако је за почетак дефинишемо као оператор:

Дефиниција 6.4.1. Дирихлеов конволутор $*$ је бинарни оператор на скупу низова индексираних од 1. За низове a и b, низ $c = a * b$ је дефинисан:

$$c = a * b \iff c_n = \sum_{ij=n} a_i b_j \forall n \in \mathbb{N}$$

Комутативност и асоцијативност следе из комутативности и асоцијативности сабирања које се јавља испод суме и множења које се јавља у суми.

Теорема 6.4.1. Дирихлеов конволутор је комутативан

Доказ. Свака конволуција је комутативна. Ово својство директно следи из комутативности сабирања и множења:

$$(a * b)_n = \sum_{\lambda_i + \lambda_j = \lambda_n} a_i b_j = \sum_{\lambda_j + \lambda_i = \lambda_n} a_j b_i = \sum_{\lambda_i + \lambda_j = \lambda_n} b_i a_j = (b * a)_n$$

У првој трансформацији сума само смо преименовали индексе, заменили им имена. У другој трансформацији смо заменили места ламбдама и чиниоцима у суманду и то смо могли зато што су сабирање и множење комутативне операције. □

Теорема 6.4.2. Дирихлеов конволутор је асоцијативан

Доказ. Из истог разлога, уз асоцијативност коначних сума:

$$((a * b) * c)_n = \sum_{\lambda_m + \lambda_k = \lambda_n} (a * b)_m c_k = \sum_{\lambda_m + \lambda_k = \lambda_n} \Big(\sum_{\lambda_i + \lambda_j = \lambda_m} a_i b_j \Big) c_k =$$

$$= \sum_{\lambda_m + \lambda_k = \lambda_n} \Big(\sum_{\lambda_i + \lambda_j = \lambda_m} a_i b_j c_k \Big) = \Big(\sum_{\lambda_m + \lambda_k = \lambda_n} \sum_{\lambda_i + \lambda_j = \lambda_m} \Big) a_i b_j c_k = \sum_{\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k = \lambda_n} a_i b_j c_k$$

Сада из истих разлога као малопре можемо да мењамо места индексима:

$$\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k = \lambda_n \Leftrightarrow \lambda_k + \lambda_j + \lambda_i = \lambda_n$$

$$\Rightarrow (a * b) * c = (c * b) * a$$

□

Дефиниција 6.4.2. За два низа a и b дефинишемо њихов збир и производ као:

$$(a + b)_n := a_n + b_n \qquad (a \cdot b)_n := a_n \cdot b_n$$

Свака конволуција је дистрибутивна са $+$.

Теорема 6.4.3. Дирихлеов конволутор је дистрибутиван са $+$.

Доказ.

$$(a*(b+c))_n = \sum_{\lambda_i+\lambda_j=\lambda_n} a_i(b+c)_j = \sum_{\lambda_i+\lambda_j=\lambda_n} (a_ib_j + a_ic_j) =$$

$$= \sum_{\lambda_i+\lambda_j=\lambda_n} a_ib_j + \sum_{\lambda_i+\lambda_j=\lambda_n} a_ic_j = (a*b)_n + (a*c)_n$$

□

Теорема 6.4.4. Множење са поптуно мултипликативном функцијом $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ је дистрибутивно са $*$.

Доказ.

$$((a*b)\cdot h)_n = \sum_{ij=n} a_ib_jh(n) = \sum_{ij=n} a_ih(i)b_jh(j) = ((a\cdot h)*(b\cdot h))_n$$

□

Теорема 6.4.5. Дирихлеова конволуција две мултипликативне функције (два мултипликативна низа) је мултипликативна функција такође (мултипликативан низ).

Доказ. Нека су a и b две мултипликативне функције и нека је $c = a*b$. Нека је $n \in \mathbb{N}$ произвољно. Довољно је доказати да за узајамно просте $x < n$ и $y < n$ за које важи $xy = n$ важи и $c(x)c(y) = c(n)$:

$$c(x)c(y) = \sum_{ij=x} a(i)b(j) \cdot \sum_{ij=y} a(i)b(j) = \sum_{d_1|x} a(d_1)b\Big(\frac{x}{d_1}\Big) \cdot \sum_{d_2|y} a(d_2)b\Big(\frac{y}{d_2}\Big)$$

Пошто су индекси независни можемо спојити суме:

$$c(x)c(y) = \sum_{\substack{d_1|x\\ d_2|y}} a(d_1)b\Big(\frac{x}{d_1}\Big)a(d_2)b\Big(\frac{y}{d_2}\Big)$$

x и y су узајамно прости, па су и d_1 и d_2. Сада, због мултипликативности функција a и b следи:

$$c(x)c(y) = \sum_{\substack{d_1|x\\ d_2|y}} a(d_1d_2)b\Big(\frac{n}{d_1d_2}\Big)$$

Пошто су x и y узајамно прости, можемо рећи:

(1) За свако d_1 што дели x и d_2 што дели y, производ $d := d_1 d_2$ дели $n = xy$.
(2) Свако d које дели n се може разбити на јединствен начин на два делиоца: $d = d_1 d_2$ таква да $d_1|x$ и $d_2|y$.

Па је Декартов производ скупа делиоца броја x и скупа делиоца броја y скуп делиоца броја n јер се између њих може успоставити бијекција. Зато суму можемо записати као:

$$c(x)c(y) = \sum_{\substack{d_1|x \\ d_2|y}} a(d_1 d_2) b\left(\frac{n}{d_1 d_2}\right) = \sum_{d|n} a(d) b\left(\frac{n}{d}\right) = (a * b)(n)$$

□

Теорема 6.4.6. Постоји неутрални низ ε такав да је за сваки низ a:

$$a * \varepsilon = \varepsilon * a = \varepsilon$$

Доказ. Докажимо

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n > 1 \end{cases}$$

Рачунамо конволуцију:

$$(a * \varepsilon)_n = \sum_{d|n} \varepsilon(d) a\left(\frac{n}{d}\right) = a(n)$$

Функција ε је свуда јаднака нула осим у јединици зато што је јединица неутрал за множење. Другим речима, $\ln 1 = \lambda_1 = 0$ и због тога смо рекли да низ L треба да садржи нулу. Приметимо да је ε потпуно мултипликативна функција. □

Дефиниција 6.4.3. Дефинишемо инверз f^{-1} за сваку функцију f тако да важи

$$f * f^{-1} = f^{-1} * f = \varepsilon$$

Теорема 6.4.7. Инверз сваке функције је јединствен ако постоји.

Доказ. Претпоставимо да функција f има два различита инверза g и h. Имамо:

$$\varepsilon = f * g = f * h \Big/ g*$$

$$\Rightarrow g * (f * g) = g * (f * h) = (g * f) * h = \varepsilon * h = h$$

А са друге стране имамо:

$$g * (f * g) = g * \varepsilon = g$$

$$\Rightarrow g = h \quad \text{и контрадикција}$$

$\square$

Теорема 6.4.8. За сваке две функције f и g које имају своје инверзе важи

$$(f * g)^{-1} = f^{-1} * g^{-1}$$

Доказ.

$$f^{-1} * g^{-1} = g^{-1} * f^{-1} = (f * g)^{-1} * (f * g) * g^{-1} * f^{-1} =$$

$$= (f * g)^{-1} * (f * (g * g^{-1}) * f^{-1}) = (f * g)^{-1} * (f * \varepsilon * f^{-1}) = (f * g)^{-1} * \varepsilon = (f * g)^{-1}$$

$\square$

Теорема 6.4.9. Свака функција f има свој инверз ако и само ако $f(1) \neq 0$.

Доказ. Нека је g инверз функције f. Имамо:

$$\varepsilon(1) = f(1)g(1) \Rightarrow g(1) = \frac{1}{f(1)}$$

Зато g није дефинисано и непостоји ако је $f(1) = 0$. Подразумевајући да $f(1) \neq 0$, имамо да за све $n > 1$ важи:

$$\varepsilon(n) = 0 = \sum_{d|n} g(d) f\left(\frac{n}{d}\right) = g(n)f(1) + \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} g(d) f\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$\Rightarrow g(n) = \frac{-1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} g(d) f\left(\frac{n}{d}\right)$$

Овом формулом могуће је рекурзивно дефинисати g надаље, за све n. $\square$

Теорема 6.4.10. Инверз функције f је мултипликативан ако и само ако је и f мултипликативна функција.

Доказ. Нека је f за почетак мултипликативна функција. За све мултипликативне функције f важи да је $f(1) = 1$. Сада рекурзија за инверз гласи:

$$g(n) = -\sum_{\substack{d|n \\ d<n}} g(d) f\left(\frac{n}{d}\right)$$

Претпоставимо супротно за мултипликативно f. Нека је n најмањи природан број такав да постоје неки узајамно прости a и b такви да је $ab = n$ и $g(a)g(b) \neq g(n)$. Другим речима нека је g мултипликативна до n и није у n, да за све узајамно просте a и b за које је $ab < n$ важи $g(a)g(b) = g(ab)$. Очигледно је $n > 1$. Фиксирајмо n, a и b. Имамо:

$$0 = \varepsilon(n) = \varepsilon(a)\varepsilon(b) = \sum_{d_1|a} g(d_1) f\left(\frac{a}{d_1}\right) \cdot \sum_{d_2|b} g(d_2) f\left(\frac{b}{d_2}\right) = \sum_{\substack{d_1|a \\ d_2|b}} g(d_1)g(d_2) f\left(\frac{a}{d_1}\right) f\left(\frac{b}{d_2}\right)$$

Избацимо последњи члан напоље:

$$0 = g(a)g(b)f(1)f(1) + \sum_{\substack{d_1|a \\ d_2|b \\ d_1d_2<ab=n}} g(d_1)g(d_2) f\left(\frac{a}{d_1}\right) f\left(\frac{b}{d_2}\right)$$

На скупу бројева који се помињу у суми као индекси обе функције (и g и f) су мултипликативне. Зато их можемо спајати:

$$0 = g(a)g(b) + \sum_{\substack{d_1|a \\ d_2|b \\ d_1d_2<n}} g(d_1d_2) f\left(\frac{ab}{d_1d_2}\right)$$

По истом аргументу за делиоце узајамно простих бројева који смо навели у доказу теореме 6.4.5, можемо упростити индексе:

$$0 = g(a)g(b) + \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} g(d) f\left(\frac{n}{d}\right)$$

Сада можемо да убацимо последњи елемент:

$$0 = g(a)g(b) + \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} g(d) f\left(\frac{n}{d}\right) = g(a)g(b) - g(n)f(1) + \sum_{d|n} g(d) f\left(\frac{n}{d}\right) =$$

$$g(a)g(b) - g(n) + \varepsilon(n) = g(a)g(b) - g(n)$$

$$\Rightarrow g(n) = g(a)g(b)$$

Доказали смо да је инверз мултипликативне функције такође мултипликативна функција. Сада нам преостаје други смер. Претпоставимо да нека немултипликативна функција f има мултипликативан инверз g. Доказали смо да је g^{-1} мултипликативна функција, па због $g^{-1} = (f^{-1})^{-1} = f$ следи да је f мултипликативна $\Rightarrow$ контрадикција. Инверз немултипликативне функције је такође немултипликативна функција. $\square$

Теорема 6.4.11. Ако је f потпуно мултипликативна функција и ако $g(1) \neq 0$, онда важи

$$(f \cdot g)^{-1} = f \cdot g^{-1}$$

Доказ. По теореми 6.4.4 где узимамо да је $h = f$ добијамо:

$$(f \cdot g^{-1}) * (f \cdot g) = f \cdot (g^{-1} * g) = f \cdot \varepsilon = \varepsilon \;\Bigg/\; *(f \cdot g)^{-1}$$

$$\Rightarrow (f \cdot g^{-1}) = (f \cdot g)^{-1}$$

□

Дефиниција 6.4.4. $\mathbb{1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ је функција дефинисана тако да је за свако $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{1}(n) = 1$. Приметимо да је $\mathbb{1}$ потпуно мултипликативна функција.

Дефиниција 6.4.5. Мебијусова функција $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ је функција дефинисана као инверз: $\mu := \mathbb{1}^{-1}$

Теорема 6.4.12. Мебијусова функција се може дефинисати на други начин:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } n \text{ бесквадратан број са парно много простих делилаца} \\ -1, & \text{ако је } n \text{ бесквадратан број са непарно много простих делилаца} \\ 0, & \text{ако је } n \text{ дељиво квадратом неког простог броја} \end{cases}$$

Доказ. По теореми 6.4.10, μ је мултипликативна функција, што значи да је дефинисана преко вредности само у тачкама p^k. За просто p имамо:

$$\mu(p) = -\sum_{\substack{d|p \\ d<p}} \mu(d)\mathbb{1}\left(\frac{p}{d}\right) = -\sum_{\substack{d|p \\ d<p}} \mu(d) = -\mu(1) = -1$$

За степене простих бројева p^k добијамо:

$$\mu(p^k) = -\sum_{\substack{d|p^k \\ d<p^k}} \mu(d) = -\sum_{0\leq s<k} \mu(p^s) = -\mu(1) - \mu(p) - \sum_{2\leq s<k} \mu(p^s) = 0 - \sum_{2\leq s<k} \mu(p^s)$$

За p^2 се добија $\mu(p^2) = 0$, а индуктивно и за сваки следећи степен p^k се добија $\mu(p^k) = 0$. Због мултипликативности Мебијусове функције, за бесквадратне бројеве добијамо:

$$\mu(n) = \mu(p_1 p_2 ... p_{\omega(n)}) = \mu(p_1)\mu(p_2)...\mu(p_{\omega(n)}) = (-1)^{\omega(n)}$$

□

Теорема 6.4.13. За потпуно мултипликативне функције f важи

$$f^{-1} = \mu \cdot f$$

Доказ. Доказ следи директно из теореме 6.4.11:

$$f^{-1} = (f \cdot \mathbb{1})^{-1} = f \cdot \mathbb{1}^{-1} = f \cdot \mu$$

□

Једна директна последица саме дефиниције Мебијусове функције је:

Теорема 6.4.14. Мебијусова инверзија. За функције $g = \mathbb{1} * f$ За функције f и g важи импликација:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) g(n) = \sum_{d|n} f(d) \quad \Longrightarrow \quad (\forall n \in \mathbb{N}) f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\Big(\frac{n}{d}\Big)$$

Доказ. Директно следи по дефиницији Мебијусове функције:

$$f = \mathbb{1}^{-1} * (\mathbb{1} * f) = \mu * g$$

□

Мало неинтуитивнија последица Мебијусове инверзије је следећа теорема која се много чешће користи због доступније суме:

Теорема 6.4.15. Генерализована Мебијусова инверзија. Односи се на комплексне функције F и G дефинисане на интервалу $[1, +\infty)$:

$$(\forall x \geq 1) G(x) = \sum_{n \leq x} F\Big(\frac{x}{n}\Big) \quad \Longrightarrow \quad (\forall x \geq 1) F(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n) G\Big(\frac{x}{n}\Big)$$

Доказ. Проширићемо област дефинисаности функција F и G на цело $\mathbb{R}$ тако што ћемо ставити да је $F(x) = G(x) = 0$ за све $x < 1$ да би суме добиле облик:

$$(\forall x \geq 1) G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F\Big(\frac{x}{n}\Big) \quad \Longrightarrow \quad (\forall x \geq 1) F(x) = \sum_{n}^{\infty} \mu(n) G\Big(\frac{x}{n}\Big)$$

Ове суме су коначне јер имају коначно много не-нула сабирака, иако на месту горње границе стоји бесконачност. Стављајући $\frac{x}{n}$ на место икса у услову добијамо:

$$G\Big(\frac{x}{n}\Big) = \sum_{m=1}^{\infty} F\Big(\frac{x}{nm}\Big) = \sum_{n|m} F\Big(\frac{x}{m}\Big)$$

Користећи ове записе доказаћемо теорему отпозади:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)G\Big(\frac{x}{n}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)\sum_{n|m}F\Big(\frac{x}{m}\Big) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n|m}\mu(n)F\Big(\frac{x}{m}\Big)$$

Пошто сабирака заправо има коначно много, можемо да прегрупишемо по вољи. Они су сада груписани по n. Групишимо их по m:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n|m}\mu(n)F\Big(\frac{x}{m}\Big) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n|m}\mu(n)F\Big(\frac{x}{m}\Big)$$

У другој суми члан $F\Big(\frac{x}{m}\Big)$ је константа па може изаћи испред:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n|m}\mu(n)F\Big(\frac{x}{m}\Big) = \sum_{m=1}^{\infty}F\Big(\frac{x}{m}\Big)\sum_{n|m}\mu(n) = \sum_{m=1}^{\infty}F\Big(\frac{x}{m}\Big)\cdot\varepsilon(m) = F(x)$$

□

6.5 Правдање: Конволуција

Теорема 6.5.1. Ако $D(a,s)$ и $D(b,s)$ конвергирају апсолутно за неко s, онда за то исто s и њихов производ $D(a*b,s)$ конвергира апсолутно и $D(a*b,s) = D(a,s)\cdot D(b,s)$

Доказ. Производ два реда другачије можемо записати као:

$$D(a,s)D(b,s) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n^s}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_m}{m^s}\right)\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}\frac{b_m}{m^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_n b_m}{(nm)^s}$$

Слично, пошто су редови и апсолутно конвергентни, имамо да сума $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|(a_n b_m)/(nm)^s|$ постоји. По теореми 3.2.3, чланове $(a_n b_m)/(nm)^s$ можемо било како поређати у низ и сума тог реда ће бити једнака $D(a,s)\cdot D(b,s)$. Имамо:

$$D(a,s)D(b,s) = \sum_{P=1}^{\infty}\sum_{nm=P}\frac{a_n b_m}{(nm)^s} = \sum_{P=1}^{\infty}\frac{(a*b)_P}{P^s} = D(a*b,s)$$

□

6.6 Ојлеров производ

Када смо због конволуције у редове убацивали мултипликативну структуру природних бројева нисмо рекли шта треба да очекујемо. Убацили смо је тек тако. Генератори групе $(\mathbb{N}, \cdot)$ су управо прости бројеви. Мултипликативне функције су те које су мање-више одређене својим генераторима. Мање-више зато што их не одређују само прости бројеви, него и степени простих бројева: $p, p^2, p^3, ..., p^k, ...$ Ојлеров производ показује какву везу имају конволуција и генератори. Ојлеров производ раставља ред на своје генераторе.

Теорема 6.6.1. Ојлеров производ. Нека је $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ мултипликативна функција. Ако је за $s \in \mathbb{C}$ ред $D(\varphi, s)$ апсолутно конвергентан онда се он може раставити:

$$\prod_p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(p^k)}{p^{sk}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}$$

где је производ по свим простим бројевима p.

Доказ. Нека је за свако просто p:

$$\varphi_p(n) := \begin{cases} \varphi(n), & n = p^k \text{ за неко } k \in \mathbb{N}_0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Теорема постаје еквивалентна са:

$$\lim_{m \to \infty} \prod_{p \leq m} D(\varphi_p, s) = D(\varphi, s)$$

Скуп чланова реда $D(\varphi_p, s)$ за сваки прост број p је само подскуп чланова реда $D(\varphi, s)$ који је апсолутно конвергентан, па је због тога и ред $D(\varphi_p, s)$ такође апсолутно конвергентан. Сада, по теореми 6.5.1 за свако m важи:

$$\prod_{p \leq m} D(\varphi_p, s) = D(a_m, s)$$

где је $a_m = \varphi_2 * \varphi_3 * ... * \varphi_{p_v}$, а бројеви $p_1, p_2, ..., p_v$ су сви прости бројеви мањи или једнаки m и има их укупно v. По истој теореми, тај ред $D(a_m, s)$ је апсолутно конвергентан. Због асоцијативности конволуције, за свако $k \in \mathbb{N}$ важи:

$$a_m(k) = \sum_{i_1 i_2 ... i_v = k} \varphi_{p_1}(i_1)\varphi_{p_2}(i_2)...\varphi_{p_v}(i_v)$$

Кад год i_j није степен простог броја p_j, $\varphi_p(i_j)$ је једнако 0. Тако да, довољно је да гледамо само оне i_j који су степени тог простог броја: $i_j = p_j^{s_j}$, за неко $s_j \in \mathbb{N}_0$:

$$a_m(k) = \sum_{p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_v^{s_v} = k} \varphi(p_1^{s_1}) \varphi(p_2^{s_2}) \dots \varphi(p_v^{s_v})$$

По основној теореми аритметике, за свако k постоји јединствена факторизација на просте бројеве $k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$. Па, ако у факторизацији броја k учествује неки прост број већи од m, услов испод суме никад неће бити задовољен (јер, кад би био, то би била друга факторизација броја k), па је тада $a_m(k) = 0$. Ако у факторизацији учествују само прости бројеви не већи од m онда ће услов испод суме бити задовољен тачно једанпут, и то када је $s_j = \alpha_j$ за свако $j \leq v$. Дакле, у том случају важи $a_m(k) = \varphi(p_1^{\alpha_1}) \varphi(p_2^{\alpha_2}) \dots \varphi(p_v^{\alpha_v})$, што је због мултипликативности функције φ једнако: $\varphi(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_v^{\alpha_v}) = \varphi(k)$. Пошто су за сваки број $k \leq m$ његови прости чиниоци мањи или једнаки m, имамо да за свако $k \leq m$ важи $a_m(k) = \varphi(k)$. А, за $k > m$ имамо или $a_m(k) = 0$ или $a_m(k) = \varphi(k)$. Да би лимес из теореме био $D(\varphi, s)$, разлика тог реда и парцијалног $D(a_m, s)$ мора да тежи нули. Посматрајмо разлику:

$$D(\varphi, s) - \prod_{p \leq m} D(\varphi_p, s) =: D(r_m, s)$$

Доказали смо да важи $r_m(k) = 0$ за $k \leq m$, а за $k > m$ имамо $\left| \frac{r_m(k)}{k^s} \right| \leq \left| \frac{\varphi(k)}{k^s} \right|$. Пошто ред $D(\varphi, s)$ апсолутно конвергира, можемо рећи да он апсолутно конвергира неком броју A. Према томе,

$$\left| D(\varphi, s) - \prod_{p \leq m} D(\varphi_p, s) \right| = \left| D(r_m, s) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{r_m(n)}{n^s} \right| =$$

$$= \sum_{n=m+1}^{\infty} \left| \frac{r_m(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \left| \frac{\varphi(n)}{n^s} \right| = A - \sum_{n=1}^{m} \left| \frac{\varphi(n)}{n^s} \right|$$

Кад $m \to \infty$, десна страна тежи нули, па и разлика $D(r_m, s)$ тежи нули. $\square$

Пошто је логаритам диференцијабилна и непрекидна функција на домену $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (бар је његова Риманова површ), потпуно оправдано смемо да обе стране Ојлеровог идентитета ставимо под логаритам. Логаритам ће пролазити кроз лимес. Једини услов је да $D(\varphi, s) \neq 0$ зато што логаритам није дефинисан једино у нули. Зато, као и у почетку овог рада, да бисмо издвојили просте бројеве у облику суме, а не производа, довољно је да логаритмујемо обе стране Ојлеровог производа. То је један начин да издвојимо просте бројеве. Са друге стране, овај Ојлеров идентитет већ показује **одједном** како се **свако** $\ln n$ (а не само једно) раставља на просте бројеве:

$$\ln n = \sum_i \alpha_i \ln p_i$$

Ову једначину у Ојлеровом идентитету нисмо ниједном експлицитно написали у овом облику, али она се ипак налази у њему: у степенима редова. Са десне стране идентита, у степенима се налазе логаритми $\ln n$, а са леве стране идентитета се налазе логаритми простих бројева $\alpha \ln p$ за сваки прост број p и сваки његов степен α. Зато не морамо да логаритмујемо цео идентитет поново да бисмо издвојили просте бројеве, они су већ издвојени у степенима. Степене за Дирихлеов ред смо управо тако и бирали. Бирали смо их тако да њихова адитивна структура буде иста као и мултипликативна структура природних бројева. Из истог разлога смо увели логаритам у причу и у уводном, елементарном делу. Отуда се логаритам појављује и у Чебишевљевој функцији ϑ и у овом Дирихлеовом реду. Само што се у овом реду појављује у степенима, а не у коефицијентима, као што је потребно за Тауберовске теореме. Али, срећом, знамо да степене можемо да спустимо међу коефицијенте диференцирањем реда. Тако да, пошто смо логаритам већ увели у причу на путу до овог Ојлеровог идентита, нема потребе и не треба сада поново да користимо логаритам, него треба да диференцирамо ред. Шта се тада добија видећемо мало касније, у делу где се доказује теорема о простим бројевима, а сада морамо да оправдамо то спуштање степена и да докажемо сва преостала холоморфна својства Дирихлеових редова.

6.7 Правдање: Холоморфност

Почећемо са облашћу дефинисаности реда. Ред је дефинисан тамо где конвергира. Дирихлеов ред, као и степени ред, има своју област и границу конвергенције. За случај степеног реда, та област је круг, а граница је кружница. Полупречник те кружнице зове се радијус конвергенције реда. Теорема каже да у свим тачкама у унутрашњости тог круга степени ред конвергира, а у спољашњости дивергира, док је на граници понашање реда неодређено. Као што степени редови имају свој радијус конвергенције, тако и Дирихлеови редови имају свој аналог тој граници, абсцису конвергенције. Због смене $x = e^{-s}$, гранична кружница се слика у вертикалну праву. Очекивано је да постоји права таква да десно од ње ред конвергира, а лево од ње дивергира. Докази да ред дивергира у тачкама са негативним реалним делом, као и докази неких других својстава реда у тим тачкама, су напорни и, у нашем случају, непотребни. Ни у једном кораку се не помињу редови који су дефинисани лево од имагинарне осе нити се испитују њихова аналитичка својства у тим тачкама. Доказаћемо само да абсциса лепо одређује дефинисаност реда у тачкама са позитивним реалним делом. У одређивању конвергентности реда главно оруђе ће нам, поново, бити Абелова формула. Овога пута, интеграл ће давати ред величине реда, а производ $A(x)f(x)$ ће бити функција малог реда. Представићемо интегралну дефиницију реда $D(a, s)$. Парцијална сума у Абеловој формули биће

$$(*) \quad A(x) = \sum_{n \leq x} a_n$$

За разлику од степеног реда, области условне и апсолутне конвергенције не морају бити исте за Дирихлеов ред. Нека својства имају само редови који апсолутно конвергирају. Зато нас занима и та област. Једино својство које нам је потребно свуда је холоморфност и оно не захтева апсолутну конвергенцију.

Теорема 6.7.1. За ред $D(a, s)$ и функцију A дефинисану са (*), постоји абсциса конвергенције $\sigma_0 := \inf\{\sigma \in \mathbb{R}^+ | A(x) = \mathcal{O}(x^\sigma)\}$ таква да ред $D(a, s)$ конвергира за $\Re(s) > \sigma_0$, дивергира за $0 < \Re(s) < \sigma_0$ и на области $\Re(s) > \sigma_0$ важи једнакост:

$$D(a, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = s \int_1^{\infty} \frac{A(t)}{t^{s+1}} dt$$

Доказ. Претпоставимо да ред конвергира за неко s, $\Re(s) > 0$. Нека је функција B дефинисана слично као A:

$$B(x) := \sum_{n \leq x} \frac{a_n}{n^s}$$

Пошто $B(x)$ конвергира ка $D(a, s)$ када $x \to +\infty$, имамо $B(x) = \mathcal{O}(1)$. Абеловом формулом се добија:

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a_n = \sum_{n \leq x} \frac{a_n}{n^s} n^s = B(x)x^s - \int_1^x B(t)st^{s-1}dt = \mathcal{O}(x^s) - \int_1^x \mathcal{O}(st^{s-1})dt$$

По леми 3.3.2, интеграл је реда $\mathcal{O}(x^s)$. Дакле, добијамо

$$\Rightarrow A(x) = \mathcal{O}(x^s) \Rightarrow \Re(s) \geq \sigma_0$$

Контрапозицијом се закључује да ако важи $0 < \Re(s) < \sigma_0$ онда ред не конвергира у s и није дефинисан. Остаје нам да докажемо да за све s, $\Re(s) > \sigma_0$, ред конвергира. Нека је $\varepsilon = \frac{\Re(s) - \sigma_0}{2} > 0$. За такво s, имамо $A(x) = \mathcal{O}(x^{s-\varepsilon})$,

$$B(x) = \sum_{n \leq x} \frac{a_n}{n^s} = \frac{A(x)}{x^s} + s \int_1^x \frac{A(t)}{t^{s+1}} dt = \mathcal{O}(x^{-\varepsilon}) + s \int_1^x \mathcal{O}\Big(\frac{t^{s-\varepsilon}}{t^{s+1}}\Big) dt =$$

$$= o(1) + s\int_1^x \mathcal{O}\big(t^{-1-\varepsilon}\big)dt$$

По теореми 3.3.4, интеграл је конвергентан. Пошто је разлика интеграла и суме величине $o(1)$, конвергира и ред. □

Сваки ред има и своју абсцису апсолутне конвергенције. То је вертикална права са особином да десно од ње ред конвергира апсолутно, а лево од ње не конвергира апсолутно. За њено одређивање потребна нам је следећа парцијална сума:

$$A^*(x) := \sum_{n\leq x} |a_n|$$

Теорема 6.7.2. За ред $D(a,s)$, постоји абсциса апсолутне конвергенције $\sigma_1 := \inf\{\sigma \in \mathbb{R}^+ | A^*(x) = \mathcal{O}(x^\sigma)\}$ таква да ред $D(a,s)$ конвергира апсолутно за $\Re(s) > \sigma_1$, и не конвергира апсолутно за $0 < \Re(s) < \sigma_0$

Доказ. Абсциса конвергенције реда $D(c,s)$, $c_n := |a_n|$, је управо σ_1. Нека је $\sigma = \Re(s)$. По претходној теореми, ред

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{n^s}\right| = \sum_{n=1}^{n^s}\frac{c_n}{n^\sigma} = D(c,\sigma)$$

конвергира кад год је $\sigma > \sigma_1$ и дивергира кад ког је $0 < \sigma < \sigma_1$. □

Теорема 6.7.3. За сваки ред $D(a,s)$ важи $0 \leq \sigma_1 - \sigma_0 \leq 1$.

Доказ. (1) $\sigma_1 \geq \sigma_0$:

$$|A(x)| = \Big|\sum_{n\leq x} a_n\Big| \leq \sum_{n\leq x}|a_n| = A^*(x) \Rightarrow A(x) = \mathcal{O}(A^*(x))$$

(2) $\sigma_1 \leq \sigma_0 + 1$: За произвољно $\varepsilon > 0$ имамо n_0 и $c > 0$ такве да

$$A^*(x) = \sum_{n\leq x}|a_n| = \sum_{n\leq x}|A(n) - A(n-1)| = \sum_{n\leq x}\mathcal{O}(n^{\sigma_0+\varepsilon}) \leq$$

$$\leq \mathcal{O}(1) + \sum_{n_0\leq n\leq x} c\cdot n^{\sigma_0+\varepsilon} \leq \mathcal{O}(1) + (x-n_0)cx^{\sigma_0+\varepsilon} = \mathcal{O}(x^{\sigma_0+1+\varepsilon})$$

□

Теорема 6.7.4. За произвољне реалне $\varepsilon > 0$ и $\alpha < \frac{\pi}{2}$, ред $D(a,s)$ конвергира униформно у унутрашњости угла:

$$U = \{s \in \mathbb{C} | arg(s - \sigma_0 - \varepsilon) \leq \alpha\}$$

Ову теорему у овом облику први је записао Перон [4]

Доказ. Нека је $s \in U$ и $h := s - \sigma_0 - \varepsilon$. Нека је $\sigma = \Re(s) - \sigma_0 + \varepsilon = \Re(h) > 0$. Из поставке имамо да је однос $\frac{|h|}{\sigma} \leq \frac{1}{\cos\alpha}$ ограничен. Дефинишимо парцијалну суму за тачку $\sigma_0 + \varepsilon$:

$$B(x) := \sum_{n \leq x} \frac{a_n}{n^{\sigma_0+\varepsilon}}$$

Функција $B(x)$ конвергира:

$$\lim_{x\to\infty} B(x) = D(a, \sigma_0 + \varepsilon) \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \sup_{t>x} |B(t) - B(x)| = 0$$

За ред $D(a, s)$ имамо:

$$D(a,s) = \sum_{n \leq x} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n \leq x} \frac{a_n}{n^{\sigma_0+\varepsilon}} \frac{1}{n^h} = \frac{B(x)}{x^h} + h \int_1^x \frac{B(t)}{t^{h+1}} dt = o(1) + h \int_1^x \frac{B(t)}{t^{h+1}} dt$$

$$\Rightarrow D(a,s) = h \int_1^\infty \frac{B(t)}{t^{h+1}} dt$$

Сада можемо да проценимо колико брзо ред конвергира на области U:

$$\Big| D(a,s) - \sum_{n \leq x} \frac{a_n}{n^s} \Big| = \Big| h \int_1^\infty \frac{B(t)}{t^{h+1}} dt - h \int_1^x \frac{B(t)}{t^{h+1}} dt - \frac{B(x)}{x^h} \Big| =$$

$$= \Big| h \int_x^\infty \frac{B(t)}{t^{h+1}} dt - \frac{B(x)}{x^h} \Big| =$$

$$= \Big| h \int_x^\infty \frac{B(t)}{t^{h+1}} dt - B(x) \int_x^\infty \frac{h}{t^{h+1}} dt \Big| =$$

$$= \Big| h \int_x^\infty \frac{B(t) - B(x)}{t^{h+1}} dt \Big| \leq \frac{\sigma}{\cos\alpha} \int_x^\infty \frac{|B(t) - B(x)|}{t^{\sigma+1}} dt \leq$$

$$\leq \frac{\sigma}{\cos\alpha} \int_x^\infty \frac{\sup_{t>x} |B(t) - B(x)|}{t^{\sigma+1}} dt = \frac{\sup_{t>x} |B(t) - B(x)|}{\cos\alpha} \int_x^\infty \frac{\sigma}{t^{\sigma+1}} dt =$$

$$= \frac{\sup_{t>x} |B(t) - B(x)|}{\cos\alpha} \frac{1}{t^\sigma} < \frac{\sup_{t>x} |B(t) - B(x)|}{\cos\alpha}$$

Последњи израз не зависи од s, што значи да одабир тачке s неће утицати на брзину конвергирања реда. □

За холоморфност Дирихлеовог реда искористићемо Вајерштрасову теорему која гласи:

Теорема 6.7.5. Вајерштрасова теорема. Нека је f_n низ комплексних функција. Ако је свака од њих холоморфна на отвореном скупу $U \subset \mathbb{C}$ и ако на сваком компактном подскупу $K \subset U$ низ (f_n) униформно конвергира ка некој комплексниј функцији f, онда:

(1) је f такође холоморфна функција на U и

(2) за свако $k \in \mathbb{N}$ низ $f_n^{(k)}$ униформно конвергира ка $f^{(k)}$ на сваком компактном подскупу $K \subset U$.

Теорема 6.7.6. Ред $D(a,s)$ је холоморфна функција по s на области $\Re(s) > \sigma_0$ и за свако $k \in \mathbb{N}$ важи:

$$D^{(k)}(a,s) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n (\ln n)^k}{n^s}$$

Доказ. Сваки компактан подскуп $K \subset \left\{ s \in \mathbb{C} \middle| \Re(s) > \sigma_0 \right\}$ се налази у неком углу описаном у Пероновој теореми за неко α. Према томе, лимес

$$D(a,s) = \lim_{n\to\infty} f_n(s) \qquad \text{за} \qquad f_n(s) := \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i^s}$$

конвергира униформно на сваком K и, по Вајерштрасовој теореми, он је холоморфна функција јер је свака функција f_n холоморфна (као збир коначно много холоморфних функција). Пошто је свако f_n холоморфно, k-ти извод функције f_n можемо добити као збир k-тих извода свих његових чланова:

$$\frac{d^k}{ds^k} f_n(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d^k}{ds^k} \frac{a_i}{i^s} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i(-\ln i)^k}{i^s}$$

Поново, по Вајерштрасовој теореми, имамо да је

$$D^{(k)}(a,s) = \lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(s) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i(-\ln i)^k}{i^s} = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(\ln n)^k}{n^s}$$

□

Теорема 6.7.7. Јединственост. Нека су $D(a,s)$ и $D(b,s)$ два Дирихлеова реда са коначном абсцисом конвергенције. Ако важи једнакост $D(a,s) = D(b,s)$ за све s са довољно великим реалним делом, онда за свако $n \in \mathbb{N}$ важи једнакост $a_n = b_n$.

Доказ. Претпоставићемо супротно. Нека је $c_n = a_n - b_n$ и $H(s) := F(s) - G(s)$ Дирихлеов ред са коефицијентима c_n који је идентички једнак нули. По теореми 6.7.3, постоји $\sigma_1 > 0$ такво да ред $H(s)$ конвергира апсолутно за све $\Re(s) \geq \sigma_1$.

Треба да докажемо да је $c_n = 0$ за свако n. Ако претпоставимо супротно, постоји најмање m такво да $c_m \neq 0$. Пошто је $H(s) = 0$ за све $\Re(s) = \sigma > \sigma_1$, важи

$$0 = \frac{c_m}{m^\sigma} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{c_n}{n^\sigma}$$

$$\Rightarrow |c_m| = m^\sigma \Big| \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{c_n}{n^\sigma} \Big| \leq m^\sigma \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{|c_n|}{n^\sigma} = m^{\sigma_1} m^{\sigma-\sigma_1} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{|c_n|}{n^{\sigma_1}} \frac{1}{n^{\sigma-\sigma_1}}$$

Ставимо $\lambda = \sigma - \sigma_1 > 0$:

$$|c_m| \leq m^{\sigma_1} m^\lambda \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{|c_n|}{n^{\sigma_1}} \frac{1}{n^\lambda} \leq m^{\sigma_1} m^\lambda \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{|c_n|}{n^{\sigma_1}} \frac{1}{(m+1)^\lambda} =$$

$$= \frac{m^\lambda}{(m+1)^\lambda} \cdot m^{\sigma_1} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{|c_n|}{n^{\sigma_1}} = \frac{m^\lambda}{(m+1)^\lambda} \cdot C_0$$

По дефиницији за σ_1, ова бесконачна сума конвергира и зато постоји константа C_0. Она не зависи од λ. Пошто је λ произвољно имамо:

$$|c_m| \leq \lim_{\lambda \to +\infty} \left(\frac{m^\lambda}{(m+1)^\lambda} \cdot C_0 \right) = C_0 \cdot \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{m^\lambda}{(m+1)^\lambda} = C_0 \cdot 0 = 0$$

Добили смо контрадикцију: $c_m = 0$. □

Следећа теорема је аналог Прингсхајмове теореме за степене редове која гласи:

Теорема 6.7.8. Прингсхајмова теорема. Ако функција $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ има радијус конвергенције r и сви коефицијенти су ненегативни реални бројеви: $a_n \geq 0$, тада функција $f(z)$ има сингуларитет у $z = r$.

Због пресликавања $z = e^{-s}$ тачка r се слика у σ_0 што је граница конвергентности за Дирихлеове редове. Имамо Ландауову теорему:

Теорема 6.7.9. Ландауова теорема. Ако су сви коефицијенти реда $f(s) = D(a, s)$ ненегативни реални бројеви, онда функција $f(s)$ има сингуларитет у пресеку реалне осе и абсцисе конвергенције.

Доказ. Пошто посматрамо само полураван са позитивним реалним делом, претпоставићемо да је $\sigma_0 > 0$ што заправо не утиче на доказ.

Претпоставићемо супротно. Ако је функција $f(s)$ регуларна (аналитичка) у $s = \sigma_0$, онда постоји нека околина тачке σ_0 у којој је f холоморфна, рецимо радијуса ε. По теореми 6.7.6, f је холоморфна и на $\Re(s) > \sigma_0$. Следи да је радијус конвергенције у тачки $\sigma = \sigma_0 + \varepsilon$ не мањи од $\varepsilon\sqrt{2} > \varepsilon$. Добијамо да Тејлоров развој функције f у тачки σ дефинише ту функцију и у некој тачки лево од абсцисе, рецимо у $0 < \sigma' = \sigma - \delta < \sigma_0$ за $\varepsilon < \delta < \varepsilon\sqrt{2}$:

$$f(\sigma') = f(\sigma - \delta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\delta)^n f^{(n)}(\sigma)}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\delta)^n}{n!} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m(-\ln m)^n}{m^\sigma} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\delta \ln m)^n a_m}{n! m^\sigma}$$

Пошто су сви сабирци у овој двострукој суми позитивни, она конвергира апсолутно и безусловно па можемо заменити места сумама:

$$f(\sigma') = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\delta \ln m)^n a_m}{n! m^\sigma} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^\sigma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\delta \ln m)^n}{n!} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^\sigma} e^{\delta \ln m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^\sigma} m^\delta = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^{\sigma-\delta}} = D(a, \sigma - \delta) = D(a, \sigma')$$

Што би значило да ред $D(a, s)$ конвергира у $s = \sigma'$. Контрадикција. □

Све ове теореме узете су из Хардијеве књиге [4] у којој су доказане за опште Дирихлеове редове. За доказе ових теорема за опште Дирихлеове редове користи се Абелово парцијално сумирање које смо споменули у елементарном делу (онај идентитет који се добија када су обе функције из класе Φ_2).

6.8 Теорема о простим бројевима у аритметичкој прогресији

Представићемо само грубу идеју доказа. Потпун доказ се може наћи у Апостоловој књизи [11] која важи за једну од најбоље написаних књига из те области математике.

Дирихле са својим редовима није успео да докаже теорему о простим бројевима, али је успео да искористи структуру тих редова да докаже да свака аритметичка прогресија $a + nb$ садржи бесконачно много простих бројева (ако су a и b узајамно прости) [10]. Сетимо се да је Ојлеров производ првобитно био само Ојлеров доказ да хармонијска сума простих бројева дивергира (што имплицира да их има бесконачно много). За његов доказ није била потребна ниједна комплексна теорема. На исти начин као и Ојлер у том свом доказу, и Дирихле је применио Ојлеров производ на своје L-**редове** да докаже своју теорему. Редови $L(\chi, s)$ су обичи Дирихлеови редови $D(\chi, s)$ са неким додатним условима за **Дирихлеов карактер** χ. То су:

(1) да је χ потпуно мултипликативна (да би могао да се примени Ојлеров производ)

(2) да је χ периодична са периодом k (да би се издвојиле класе конгруенције по модулу k)

За неко фиксно k испоставља се да таквих карактера има тачно $\varphi(k)$ (Ојлерова φ функција, број бројева узајамно простих са k) ако за сваки од њих важи

$$|\chi(n)| = \begin{cases} 1, & (n,k) = 1 \\ 0, & (n,k) > 1 \end{cases}$$

Један од тих карактера се зове **примитиван Дирихлеов карактер** (χ_0) реда k. И за њега важи $\chi_0(n) = |\chi_0(n)| \geq 0$ за свако n. На исти начин као и у теореми 7.0.2 показује се да ред $L(\chi_0, s)$ има један прост пол у $s = 1$, док су сви остали L-редови са непримитивним карактерима холоморфни на $\Re(s) > 0$ (абсциса конергенције је 0). Њуман је у својој књизи [9] објаснио како на једноставан начин можемо да искористимо Ландауову теорему да покажемо да ниједан L-ред нема нулу у тачки $s = 1$. Идеја сада је да искористимо то што су карактери линеарно независни да направимо линеарну комбинацију функција $\ln L(\chi, s)$ тако да остају само коефицијенти из одређене класе конгруенције модула k. Пошто $\ln L(\chi, s)$ само за $\chi = \chi_0$ има сингуларитет у нули и ова линеарна комбинација има сингуларитет у нули. Како у логаритму L-редова коефицијенти постоје само за степене простих бројева, добијамо да подниз чланова који у овој линеарној комбинацији изазива дивергирање у $s = 1$ представља заправо хармонијску суму простих бројева из одређене класа конгруенције по модулу k. Добијамо да за сваку класу конгруенције модула k хармонијска сума простих бројева из те класе дивергира и, према томе, таквих простих бројева има бесконачно много.

У следећем поглављу навешћемо и доказаћемо својства која Риманова ζ функција мора да има да бисмо могли да докажемо теорему о простим бројевима. Њуман такође објашњава да је на исти начин могуће доказати да сви Дирихлеови L-редови такође имају сва та својства. Због тога важи и јачи облик Дирихлеове теореме о простим бројевима у аритметичкој прогресији:

Теорема 6.8.1. Јачи облик теореме. Нека $\pi_{a,n}(x)$ означава број простих бројева p не већих од x таквих да $p \equiv a(\mod n)$, а $\varphi(n)$ број бројева узајамно простих са n и мањих од n. Тада за $x \to +\infty$ важи асимптотска једнакост

$$\pi_{a,n}(x) \sim \frac{x}{\varphi(n) \ln x}$$

7

Теорема о дистрибуцији простих бројева: доказ

Пошто се овде ради о простим бројевима, прво ћемо видети како то Ојлеров производ спушта логаритме $\ln p$ у коефицијенте. За то нам је довољно да посматрамо најједноставнији Дирихлеов ред, **Риманову зета функцију:**

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Ојлеров производ нам каже:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{ks}}$$

Рекли смо раније да нам је идеја да овај идентитет диференцирамо. Извод леве стране се лако налази:

$$\zeta'(s) = D'(\mathbb{1}, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\ln n}{n^s} = -D(\ln, s)$$

За десну страну биће нам лакше да сваки члан у производу представимо као функцију:

$$\zeta_p(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{ks}}$$

Као када тражимо извод производа неколико функција и сада ћемо употребити нешто што личи на:

$$(*) \quad \frac{d}{ds}\big(f_1(s)f_2(s)...f_n(s)\big) = \Big(\frac{f_1'(s)}{f_1(s)} + \frac{f_2'(s)}{f_2(s)} + ... + \frac{f_n'(s)}{f_n(s)}\Big)\big(f_1(s)f_2(s)...f_n(s)\big)$$

Пошто је ζ_p уједно и степени ред, за налажење коефицијената реда $\zeta_p'(s)/\zeta_p(s)$ довољно је да добро познајемо обичну конволуцију која се испољава у степеним редовима и генераторским функцијама:

$$\zeta_p'(s) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(p^k)}{p^{ks}}$$

$$\Rightarrow \frac{\zeta_p'(s)}{\zeta_p(s)} = \frac{0 - \frac{\ln 2}{2^s} - \frac{\ln 4}{4^s} - \frac{\ln 8}{8^s} - ...}{1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{8^s} + ...} = -\frac{\ln 2}{2^s} - \frac{\ln 2}{4^s} - \frac{\ln 2}{8^s} - ... = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\ln p}{p^{ks}}$$

Када поставимо све ово у идентитет од малопре добијамо:

$$\left(\sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\ln p}{p^{ks}} \right) D(\mathbb{1}, s) = -D(\ln, s)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{p^k > 1} \frac{\ln p}{p^{ks}} \right) D(\mathbb{1}, s) = D(\ln, s) \quad (**)$$

Управо смо занемарили то да имамо бесконачно много функција које множимо за разлику од идентитета $(*)$ који их има коначно много. Зато не можемо да тврдимо да једнакост (**) важи. Она нам више служи да нам само да идеју, а једнакост ћемо оправдати испитивањем реда који смо добили у суми и испитивањем конволуција.

Ова сума из (**) је заправо дирихлеов ред са коефицијентима:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & n = p^k > 1 \text{ за неко } k > 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Ова функција се још зове **прва Манголтова функција**. Тауберовске теореме би дале информацију о расту парцијалне суме Манголтове функције:

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

која се још зове и **друга Чебишевљева функција**. Приметимо везу између две Чебишевљеве функције:

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_{1 < p^k \leq x} \ln p = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p^k \leq x} \ln p = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p \leq \sqrt[k]{x}} \ln p = \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta(\sqrt[k]{x})$$

Како је за свако $k > \log_2 x$, $\vartheta(\sqrt[k]{x}) < \vartheta(2) = 0$ суму можемо ограничити са коначно много чланова:

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2 x \rfloor} \vartheta(\sqrt[k]{x}) = \vartheta(x) + \vartheta(\sqrt{x}) + \sum_{k=3}^{\lfloor \log_2 x \rfloor} \vartheta(\sqrt[k]{x})$$

Пошто је ϑ неопадајућа функција важи неједнакост и оцена:

$$\sum_{k=3}^{\lfloor \log_2 x \rfloor} \vartheta(\sqrt[k]{x}) \leq \sum_{k=3}^{\lfloor \log_2 x \rfloor} \vartheta(\sqrt[3]{x}) = \mathcal{O}(\ln x)\vartheta(\sqrt[3]{x})$$

Резултат из елементарног дела, $\vartheta(x) = \Theta(x)$, даје оцену:

$$\psi(x) = \vartheta(x) + \vartheta(\sqrt{x}) + \mathcal{O}(\ln x)\vartheta(\sqrt[3]{x}) = \vartheta(x) + \mathcal{O}(\sqrt{x}) + \mathcal{O}(\ln x \sqrt[3]{x}) =$$

$$= \vartheta(x) + \mathcal{O}(\sqrt{x}) = \vartheta(x) + o(\vartheta(x))$$

$$\Rightarrow \psi(x) \sim \vartheta(x)$$

$$\Rightarrow \psi(x) = \Theta(x) \qquad (***)$$

Добили смо и други еквивалент теореме о дистрибуцији простих бројева, управо онај који ћемо доказати:

$$(****) \quad \psi(x) \sim x \quad \iff \quad \vartheta(x) \sim x \quad \iff \quad \pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$$

Дакле, прва Манголтова функција се јавља као низ коефицијената реда који смо добили неформалним диференцирањем Ојлеровог производа:

$$\Phi(s) \cdot D(\mathbb{1}, s) = D(\ln, s)$$

$$\text{где је} \quad \Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = D(\Lambda, s)$$

Добијамо идеју:

Теорема 7.0.1. $\Lambda * \mathbb{1} = \ln$

Доказ. Треба да докажемо

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \ln n$$

Почећемо доказ од факторизације броја n: $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_t^{\alpha_t}$. Пошто је $\Lambda(d) = 0$ кад год d није степен простог броја, можемо записати:

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{p^k|n} \Lambda(p^k)$$

А, уз факторизацију броја n, то је даље једнако:

$$\sum_{i=1}^{t}\sum_{p_i^k|n}\Lambda(p_i^k)=\sum_{i=1}^{t}\sum_{k=1}^{\alpha_i}\Lambda(p_i^k)=\sum_{i=1}^{t}\alpha_i\ln p_i=\ln n$$

□

Даље, из $\psi(x)=\Theta(x)$ следи да је абсциса конвергенције реда $D(\Lambda,s)$ једнака 1. Што значи да на области $\Re(s)>1$ важи идентитет

$$\Phi(s)\zeta(s)=-\zeta'(s)$$

и све три функције су холоморфне и дефинисане својим редовима на том скупу.

Да бисмо добили информацију о асимптотском расту друге Чебишевљеве функције, идеја је да на Φ применимо Тауберовску теорему налик Харди–Литлвудовој. Пошто су абсцисе све три функције (Φ, ζ и ζ') једнаке 1 и сви коефицијенти су ненегативни, закључујемо да су све три функције холоморфне на $\Re(s)>1$ и да имају сингуларитет у тачки $s=1$. Лако ћемо добити и да је тај сингуларитет у Φ прост пол, одакле по Винер–Икехариној Тауберовској теореми следи да је $\psi(x)\sim x$ и тиме смо доказ привелу крају. Међутим, та теорема захтева један додатни, Тауберовски услов. То је да, када се преведе, $(s-1)\Phi(s)$ буде холоморфна функција на целој **затвореној** полуравни $\Re(s)\geq 1$. Да би тај услов био испуњен, потребно и довољно је да докажемо да је Риманова зета функција холоморфна на истој тој полуравни и да на том скупу **нема нуле**. Потребан нам је низ следећих теорема:

Теорема 7.0.2. $\zeta(s)$ се мероморфно проширује на $\Re(s)>0$ са једним простим полом у $s=1$.

Доказ. Идеја је да се направи ред који представља разлику ове две функције тако што се примени Абелова формула за $\zeta(s)$ и парцијална интеграција на члану $\frac{1}{s-1}$. За $\Re(s)>1$ имамо:

$$\zeta(s)-\frac{1}{s-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}-\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^s}=s\int_1^{\infty}\frac{\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}dx-\Big(-1+s\int_1^{\infty}\frac{x}{x^{s+1}}dx\Big)=$$

$$=1-s\int_1^{\infty}\frac{x-\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}dx=1-s\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{x-\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}dx=$$

$$=1-s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\int_n^{n+1}(x-\lfloor x\rfloor)\frac{n^s}{x^{s+1}}dx$$

Последњаи израз је Дирихлеов ред са позитивним реалним коефицијентима:

$$a_n = \int_n^{n+1} (x - \lfloor s \rfloor) \frac{n^s}{x^{s+1}} dx < \int_n^{n+1} 1 \cdot \frac{n^s}{n^{s+1}} dx = \frac{1}{n}$$

Дакле, $\sum_{n \le x} a_n = \mathcal{O}(\ln x)$ и одатле абсциса ковергенције (условне и апсолутне) новодобијеног реда је $\sigma_0 = 0$. Дакле, разлика функција $\zeta(s)$ и $\frac{1}{s-1}$ је ред који је холоморфан на $\Re(s) > 0$. □

Теорема 7.0.3. $\zeta(s)$ нема нуле на $\Re(s) > 1$.

Доказ. На скупу који испитујемо, $\zeta(s)$ се може представити у облику производа:

$$\zeta(s) = \prod_p \sum_{k=0}^{\infty} p^{-ks} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Знамо да ће производ увек конвергирати. Али, логаритам производа ће конвергирати ако и само ако је $\zeta(s) \neq 0$, јер се логаритам не може дефинисати једино у нули. Узмимо логаритме:

$$\ln \zeta(s) = -\sum_p \ln(1 - p^{-s})$$

Сваки члан у суми можемо да проценимо првим чланом Тејлоровог развоја у јединици пошто низ $1 - p^{-s}$ конвергира јединици када p тежи бесконачности:

$$\ln(1 - p^{-s}) = \mathcal{O}(p^{-s})$$

Слично као и пре, велико О можемо избацити из суме:

$$\ln \zeta(s) = \mathcal{O}\Big(\sum_p p^{-s} \Big) < \mathcal{O}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \Big) = \mathcal{O}(\zeta(s)) = \mathcal{O}(1)$$

Дакле, логаритам је ограничен и производ не може достићи нулу. □

Теорема 7.0.4. $\zeta(s)$ нема нуле на правој $\Re(s) = 1$.

Доказ. Мертенсов доказ. Претпоставимо да $\zeta(s)$ има нулу у некој тачки $s = 1 + it$ за неко $t > 0$ реда $\mu > 0$ и нулу реда $\nu \geq 0$ у тачки $s = 1 + 2it$. Због симетрије (због реалних коефицијената реда ζ), исто ће важити и за тачке $s = 1 - it$ и $s = 1 - 2it$. Пошто изводи смањују ред нуле за 1, а ред полова повећавају за 1, функција Φ ће имати само просте полове и то у тачкама где ζ има нуле и полове. То су $s = 1$, $s = 1 + it$ и $s = 1 - it$. Још, остатак у полу реда l у изводу је тачно $-l$ пута већи. Зато, Φ има целобројне остатке у својим половима који представљају ред нуле ζ функције (помножен са -1). Ако ζ има нулу реда h (h може бити и негативно, ако је у питању пол, а не нула), тај остатак за Φ је $-h$. Важи:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon\Phi(1+\varepsilon) = 1$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon\Phi(1+\varepsilon \pm it) = -\mu$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon\Phi(1+\varepsilon \pm 2it) = -\nu$$

Сумирајући следећи идентитет

$$\sum_{r=-2}^{2} \binom{4}{2+r} n^{irt} = (n^{-ir/2} + n^{ir/2})^4 \geq 0$$

по свим бројевима n са ненегативним тежинама $\Lambda(n)$ добија се неједнакост

$$\sum_{r=-2}^{r} \binom{4}{2+r} \Phi(1+\varepsilon+irt) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{1+\varepsilon}} (n^{-ir/2} + n^{ir/2})^4 \geq 0$$

која у лимесу $\varepsilon \to 0^+$ имплицира $6 - 8\mu - 2\nu \geq 0$. Дакле, $\mu = 0$ и ζ нема нуле на правој $\Re(s) = 1$. □

Теорема 7.0.5. $\Phi(s) - \frac{1}{s-1}$ је холоморфна функцијана $\Re(s) \geq 1$.

Доказ. $\Phi(s)$ је мероморфна функција дефинисана као разломак $-\zeta'(s)/\zeta(s)$. Из претходне две теореме следи да је Φ холоморфна на скупу $\Re(s) \geq 1$ без тачке $s = 1$, а у тој тачки $s = 1$ има прост пол зато што и $\zeta(s)$ има пол у тој тачки. А остатак 1 је објашњен у претходној теореми:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon\Phi(1+\varepsilon) = 1$$

□

Сада имамо све потребне услове да можемо да применимо Тауберовску теорему. Остало нам је да и њу поставимо и докажемо. Пре ње записаћемо једну лему.

Лема 7.0.1. Ако је $f(x)$ неопадајућа ненегативна реална функција дефинисана на $[0, +\infty)$ и интеграл

$$\int_0^{\infty} \Big(f(t)e^{-t} - 1\Big) dt$$

конвергентан, онда важи асимптотска једнакост $f(x) \sim e^x$ при $x \to +\infty$.

Доказ. Другим речима, треба да докажемо да интегранд $f(t)e^{-t}-1$ у бесконачности тежи нули што је некако интуитивно јер интеграл конвергира. Претпоставимо супротно. Нека постоји нека константа $\lambda > 1$ таква да је у произвољно великим тачкама x, $f(x) \geq \lambda e^x$ (таква да $\limsup\limits_{t\to+\infty} f(t)e^{-t} \geq \lambda > 1$). Пошто је f неопадајућа, на целом интервалу $(x, x+\ln\lambda)$ функција f је **не мања** од λe^x, па имамо:

$$\int_x^{x+\ln\lambda} \Big(f(t)e^{-t}-1\Big)dt \geq \int_x^{x+\ln\lambda} \Big(\lambda e^x e^{-t}-1\Big)dt = \int_x^{x+\ln\lambda} \Big(\lambda e^{-(t-x)}-1\Big)dt =$$

$$= \int_0^{\ln\lambda} \Big(\lambda e^{-t}-1\Big)dt = \lambda - 1 - \ln\lambda > 0$$

Слично, ако постоји $\lambda < 1$ тд. је $f(x) \leq \lambda e^x$ у произвољно великим x (дакле, $\liminf\limits_{t\to+\infty} f(t)e^{-t} \leq \lambda < 1$) имамо да је на интервалу $(x+\ln\lambda, x)$ функција f **не већа** од λe^x, па поново можемо оценити интеграл са

$$\int_{x+\ln\lambda}^{x} \Big(f(t)e^{-t}-1\Big)dt \leq 1 - \lambda + \ln\lambda < 0$$

Ово је контрадикторно са тим да интеграл конврgира јер постоје две, обе произвољно велике тачке, у којима се интеграл разликује за константу, а ако интеграл конвергира онда и та разлика мора тежити нули. Дакле, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)e^{-t} = 1$. □

Права Винер-Икехарина теорема не тражи све оне услове и тиме је тешка да се докаже [1]:

Теорема 7.0.6. Винер-Икехарина Тауберовска теорема (1931.). Нека је $A(x)$ ненегативна неопадајућа реална функција дефинисана на $[0, +\infty)$. Претпоставимо да је њена Лапласова трансформација

$$F(s) = \int_0^{\infty} A(t)e^{-st}dt$$

дефинисана за $\Re(s) > 1$ и да постоји ненегативна константа c таква да функција

$$G(s) = F(s) - \frac{c}{s-1}$$

има проширење на $\Re(s) \geq 1$ као **непрекидна** функција. Тада важи асимптотска једнакост $A(x) \sim ce^x$.

Ми ћемо доказати слабију варијанту ове теореме која додатно захтева да је $A(x) = \mathcal{O}(x)$ и да је $G(s)$ **холоморфна**, а не само непрекидна на области $\Re(s) \geq 1$. Поставићемо је у мало другачијем облику и то ће бити једина теорема која укључује градиво комплексне анализе.

Теорема 7.0.7. Аналитичка теорема. Нека је функција $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ ограничена и интеграбилна на свом домену. Ако њена Лапласова транформација

$$g(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

има аналитичко проширење на област $\Re(s) \geq 0$, онда је она дефинисана интегралом и у тачки $s = 0$. Другим речима, интеграл $\int_0^\infty f(t)dt$ постоји и конвергира ка $g(0)$.

Доказ. Лапласов интеграл очигледно конвергира за $\Re(s) > 1$. За $T > 0$ дефинишимо $g_T = \int_0^T f(t)e^{-st}dt$. Ова функција је очигледно холоморфна на целом $\mathbb{C}$. Треба да докажемо $\lim_{T\to\infty} g_T(0) = g(0)$. Идеја је да вредности функција $g_T(0)$ и $g(0)$ представимо Кошијевим интегралима и проценимо разлику два Кошијева интеграла.

Нека је R произвољно велико. Одаберимо контуру γ као границу области $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R \text{ и } \Re(z) \geq -\delta\}$, где је $\delta > 0$ довољно мало (зависно од R) тако да $g(s)$ буде холоморфно на U. Пошто је U затворен и просто повезан скуп, можемо искористити Кошијеву интегралну формулу за област U и њену границу γ. Када будемо процењивали функције $g(s)$ и $g_T(s)$ у интегралу, појавиће се $\Re(s)$ испод разломачке црте и то нам смета јер онда интеграл није униформно ограничен. Те чланове $\Re(s)$ ћемо поништити множењем са неком додатном функцијом која је холоморфна свуда и која је једнака јединици у нули (да не би утицала на Кошијев интеграл). То је функција

$$p(s) = e^{sT}\Big(1 + \frac{s^2}{R^2}\Big)$$

И важи:

$$g(0) - g_T(0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \big(g(s) - g_T(s)\big)\frac{ds}{s}$$

$$\Rightarrow g(0) - g_T(0) = \big(g(0) - g_T(0)\big)e^{sT}\Big(1 + \frac{s^2}{R^2}\Big) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \big(g(s) - g_T(s)\big)e^{sT}\Big(1 + \frac{s^2}{R^2}\Big)\frac{ds}{s}$$

За процењивање интеграла по некој контури Γ користићемо следећу познату ствар:

Ако функција s пресликава $(0,1)$ у контуру Γ, $s : x \mapsto z$, интеграл функције $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ по контури Γ можемо записати и ограничити на следећи начин:

$$\left|\int_\Gamma h(z)dz\right| = \left|\int_0^1 h(z)s'(x)dx\right| \leq \int_0^1 |h(z)||s'(x)|dx \leq$$

$$\leq \sup_{z\in\Gamma}|h(z)|\int_0^1 |s'(x)|dx = \sup_{z\in\Gamma}|h(z)| \cdot L(\Gamma)$$

где је познато да је $\int_0^1 |s'(x)|dx$ једнако дужини контуре Γ, обележеној са $L(\Gamma)$.

Пошто је $f(x)$ ограничена, обележићемо ту границу са B:

$$B := \sup_{x\geq 0} |f(x)|$$

Увешћемо помоћне контуре γ_+, γ_- и γ':

$$\gamma_+ := \gamma \cap \{\Re(z) > 0\}$$

$$\gamma_- := \gamma \cap \{\Re(z) < 0\}$$

$$\gamma' := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R, \Re(z) < 0\}$$

Све три контуре повезују две исте тачке: $s = iR$ и $s = -iR$. Пошто су функције g_T холоморфне на целом скупу $\mathbb{C}$, део интеграла који укључује g_T можемо рачунати по контури γ' уместо по γ_-.

Раставимо сада Кошијев интеграл на делове:

$$\big|g(0) - g_T(0)\big| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \big(g(s) - g_T(s)\big)p(s)\frac{ds}{s}\right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\gamma_+} \big(g(s) - g_T(s)\big)p(s)\frac{ds}{s} + \int_{\gamma_-} \big(g(s) - g_T(s)\big)p(s)\frac{ds}{s}\right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\gamma_+} \big(g(s) - g_T(s)\big)p(s)\frac{ds}{s} + \int_{\gamma_-} g(s)p(s)\frac{ds}{s} - \int_{\gamma'} g_T(s)p(s)\frac{ds}{s}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\gamma_+} \big(g(s) - g_T(s)\big)p(s)\frac{ds}{s}\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\gamma_-} g(s)p(s)\frac{ds}{s}\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\gamma'} g_T(s)p(s)\frac{ds}{s}\right| \leq$$

Ограничићемо сада делове:

$$|g(s) - g_T(s)| = \Big|\int_T^\infty f(t)e^{-st}dt\Big| \leq B\int_T^\infty |e^{-st}|dt = \frac{Be^{-\Re(s)T}}{\Re(s)} \quad (\Re(s) > 0)$$

$$|g_T(s)| = \Big|\int_0^T f(t)e^{-st}dt\Big| \leq B\int_{-\infty}^T |e^{-st}|dt = \frac{Be^{-\Re(s)T}}{|\Re(s)|} \quad (\Re(s) < 0)$$

$$\Big|p(s)\frac{1}{s}\Big| = \Big|\frac{e^{sT}}{R}\Big(\frac{s}{R} + \frac{R}{s}\Big)\Big| = e^{\Re(s)T}\cdot\frac{2|\Re(s)|}{R^2} \qquad (|s| = R)$$

Ово нам је довољно да ограничимо два од три Кошијева интеграла:

$$\left|\int_{\gamma_+} \big(g(s) - g_T(s)\big)p(s)\frac{ds}{s}\right| \leq L(\gamma_+)\sup_{s\in\gamma_+}\Big(\big|g(s) - g_T(s)\big|\cdot\Big|p(s)\frac{1}{s}\Big|\Big) \leq$$

$$\leq \pi R \sup_{s\in\gamma_+}\Big(\frac{Be^{-\Re(s)T}}{\Re(s)}\cdot e^{\Re(s)T}\cdot\frac{2|\Re(s)|}{R^2}\Big) = \pi R\sup_{s\in\gamma_+}\Big(\frac{2B}{R^2}\Big) = \frac{2\pi B}{R}$$

$$\left|\int_{\gamma'} g_T(s)p(s)\frac{ds}{s}\right| \leq L(\gamma')\sup_{s\in\gamma'}\Big(\big|g_T(s)\big|\cdot\Big|p(s)\frac{1}{s}\Big|\Big) \leq$$

$$\leq \pi R \sup_{s\in\gamma'}\Big(\frac{Be^{-\Re(s)T}}{|\Re(s)|}\cdot e^{\Re(s)T}\cdot\frac{2|\Re(s)|}{R^2}\Big) = \pi R\sup_{s\in\gamma'}\Big(\frac{2B}{R^2}\Big) = \frac{2\pi B}{R}$$

Преостао нам је интеграл

$$\int_{\gamma_-} g(s)p(s)\frac{ds}{s} = \int_{\gamma_-} e^{sT}\cdot g(s)\Big(1+\frac{s^2}{R^2}\Big)\frac{1}{s}ds$$

чији је интегранд производ две функције. Једна је $g(s)(1+s^2/R^2)/s$ која је холоморфна на γ и због тога ограничена на γ', и која **не зависи од T**. Друга је e^{sT} која је такође ограничена са 1 на $\Re(s) < 0$ и која при $T \to +\infty$ униформно конвергира ка нули на сваком компактном скупу у полуравни $\Re(s) < 0$. Следи да ће производ ове две функције тежити нули када $T \to +\infty$.

Сабирањем оцена ова три интеграла добијамо

$$\limsup_{T\to+\infty}|g(0) - g_T(0)| \leq \frac{1}{2\pi}\Big(\frac{2\pi B}{R}+\frac{2\pi B}{R}\Big) = \frac{2B}{R}$$

Како је R произвољно, ово завршава доказ. □

Теорема 7.0.8. Теорема о дистрибуцији простих бројева.

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}$$

Доказ. По Абеловој формули примењеној на $\Phi(s)$ имамо:

$$\Phi(z) = z\int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x^{z+1}}dx$$

А, парцијалном интеграцијом, као што смо урадили у теореми 7.0.2, добијамо:

$$\frac{1}{z-1} = -1 + z\int_1^\infty \frac{x}{x^{z+1}}dx$$

Ове две једнакости важе само за $\Re(z) > 1$. Увођењем смене $x = e^t$ добијамо

$$\Phi(z) - \frac{1}{z-1} = 1 + z\int_0^\infty \big(\psi(e^t) - e^t\big)e^{-zt}dt$$

што је, по теореми 7.0.5, холоморфно на области $\Re(z) \geq 1$. Тривијално следи да је и сам интеграл

$$\int_0^\infty \big(\psi(e^t) - e^t\big)e^{-zt}dt$$

холоморфан на истој области. Уведимо сад смену $s = z + 1$:

$$\int_0^\infty \Big(\frac{\psi(e^t)}{e^t} - 1\Big)e^{-st}dt$$

Сада можемо да применимо аналитичку теорему јер је функција која је дефинисана овим интегралом холоморфна на $\Re(s) \geq 0$, а у уводу (***) смо објаснили да је

$$\Big(\frac{\psi(e^t)}{e^t} - 1\Big) = \mathcal{O}(1)$$

ограничено. Аналитичка теорема каже да интеграл

$$\int_0^\infty \Big(\frac{\psi(e^t)}{e^t} - 1\Big)dt$$

постоји, одакле, по леми 7.0.1, имамо да је $\psi(e^t) \sim e^t$ јер је $\psi(e^t)$ неопадајућа функција. У уводу (****) смо такође објаснили да је ово еквивалентно са теоремом коју доказујемо:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$$

И тиме је доказ завршен. □

Једна тривијална последица теореме 7.0.8 је:

Теорема 7.0.9. Нека p_n означава n-ти прост број.При $n \to \infty$ важи

$$p_n \sim n \ln n$$

Доказ. Прво, докажимо да важи $\ln n / \ln p_n \sim 1$.

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \Rightarrow \pi(p_n) = n \sim \frac{p_n}{\ln p_n} \Leftrightarrow \ln n - \ln p_n + \ln \ln p_n = o(1)$$

$$\Rightarrow \ln n = \ln p_n + o(\ln p_n) \Leftrightarrow \ln n \sim \ln p_n$$

Сада, применимо ово одмах после првог корака:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \Rightarrow \pi(p_n) = n \sim \frac{p_n}{\ln p_n} \sim \frac{p_n}{\ln n} \Leftrightarrow p_n \sim n \ln n$$

□

8

Пар речи о елементарном доказу

Теорема о дистрибуцији простих бројева је била веома важна за математику јер је ишла у прилог хипотези да постоје **дубоке теореме**. Дубока теорема је теорема која има елемтарну и кратку поставку, али нема елементаран доказ. Другим речима, сваки њен доказ мора да буде дугачак и компликован или користи гране математике које нису очигледно повезане са самом теоремом (Шанкс, 1993.) Пре него што се појавио доказ Велике Фермаове теореме, теорема о дистрибуцији простих бројева је важила за једну од најдубљих теорема. Зато је елементаран доказ теореме о простим бројевима био важан јер је противречио хипотези. У Голдфелдовом раду [5] цитиран је Харди који објашњава поглед на дубину теорема у то време. У Хардијево време веровало се да постоји хијерархија доказа у теорији бројева у зависности од тога које класе бројева се користе у доказима (цели, реални, комплексни). Елементаран доказ теореме о простим бројевима (поред саме теореме) доказао је и да су елементарне методе много моћније него што се до тада веровало. Најбитнији корак у елементарном доказу је **Селбергова формула симетрије (1948.)**, коју је он сам назвао *фундаменталном формулом*:

$$\sum_{n\leq x}\Lambda(n)\ln n+\sum_{mn\leq x}\Lambda(m)\Lambda(n)=2x\ln x+\mathcal{O}(x)$$

Уз помоћ ове формуле, Ердош је доказао да однос узастопних простих бројева тежи јединици, одакле теорема о простим бројевима следи у пар корака. Детаљније о настанку елементарног доказа и историјске чињенице можете прочитати у Голдфелдовом раду [5], а основне идеје иза Селбергове формуле могу се наћи у Баладијевом раду [6] и Руркеовом раду [7]. Тамо се за доказ Селбергове формуле користи Мебијусова инверзија коју смо и ми доказали. Идеја за Селбергову формулу долази из комплексних доказа теореме о простим бројевима у којима се уводи хомогенисана Чебишевљева функција:

$$\psi_2(x) = \int_0^x \psi(x)dx$$

и после доказује $\psi_2(x) \sim x^2/2 \Rightarrow \psi(x) \sim x$. Увођење ове функције је еквивалентно конволуирању Манголтове функције са самом собом (лева страна Селбергове формуле), а доказивање асимптотског раста функције $\psi_2(x)$ је еквивалентно налажењу остатка мањег реда $\big(\mathcal{O}(x)\big)$ у Селберговој формули.

Литература

[1] J. Korevaar, *Tauberian Theory - A Century of Developments*, Springer-Verlag, Спрингер Верлаг, Берлин, 2004.

[2] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta Function*, Оксфорд, 1951.

[3] N. Wiener, *Tauberian Theorems*, Annals of Mathematics, Математички анали, 1932.

[4] G. H. Hardy, *The general theory of Dirichlet's series*, 1915.

[5] D. Goldfeld, *The elementary proof of the prime number theorem: A historical perspective*

[6] S. Balady, *Annotation: A discussion of the fundamental ideas behind Selberg's "Elementary proof of the prime-number theorem"*, 2006.

[7] C. O'Rourke *The prime number theorem: Analytic and elementary proofs*, 2013.

[8] B. Riemann *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Berlin, Берлин, 1859.

[9] D. J. Newman *Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, Спрингер Верлаг, Њујорк, 1998.

[10] P.G.L. Dirichlet *Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält*, 1837.

[11] T. M. Apostol *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, Спрингер Верлаг, Њујорк, 1976.